# Parcial de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

20 febrero 2007

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

**Ejercicio 1.** (**20 p**) Sea $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicado primitivo recursivo. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas, mostrando que se pueden definir a partir de las funciones iniciales, las funciones primitivas recursivas vistas en clase, u obtenidas por composición o recursión primitiva.

a) (**15 p**) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(l, i) = n$ si la posición del $i + 1$-ésimo elemento de la lista $l$ que cumple con $P$ (empezando a contar desde la izquierda) es $n$. En caso de que no exista un $i + 1$-ésimo elemento tal, $f(l, i)$ debe devolver 0.

   Por ejemplo, si $P(x)$ representa "$x$ es par" entonces

$$\begin{aligned} f([1,8,3,6,6],0) &= 2 \\ f([1,8,3,6,6],1) &= 4 \\ f([1,8,3,6,6],2) &= 5 \\ f([1,8,3,6,6],3) &= 0 \end{aligned}$$

b) (**5 p**) filter : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que recibe una lista $l$ y devuelve la lista con los elementos de $l$ que cumplen con $P$ (en el mismo orden en el que estaban).

   Por ejemplo, si $P(x)$ representa "$x$ es par" entonces

$$\begin{aligned} \text{filter}([1,8,3,6,6]) &= [8,6,6] \\ \text{filter}([1,3,3,7,9]) &= [\ ] \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.** (**30 p**) Sea $B = \{x : W_x \text{ tiene al menos 2 elementos}\}$.

a) (**20 p**) Decidir si $B$ es r.e. y demostrarlo.

b) (**10 p**) Decidir si $\overline{B}$ es r.e. y demostrarlo.

**Ejercicio 3.** (**25 p**) Sea $e$ un número fijo y sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable tal que $\Phi_e(x) \downarrow$ sii $\Phi_e(x)$ termina en a lo sumo $g(x)$ pasos. Probar que $\Phi_e$ es extensible. Recordar que una función $f$ es *extensible* si existe una función $h$ computable tal que $f(x) = h(x)$ para todo $x \in \text{dom } f$.

**Ejercicio 4.** (**25 p**) Sea la función $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si dom } \Phi_x \subseteq \{0, \ldots, x\} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Decidir si la función es o no computable y demostrarlo.