Recuperatorio de computabilidad

Lógica y computabilidad

2do cuatrimestre de 2018

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras.

Se debe entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido, y número de orden. Justificar todas las respuestas.

Ejercicio 1. Considere la función **primosHasta** : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que **primosHasta**(n) dice cuántos números primos hay entre 0 y n (nota: recordar que 0 y 1 no son primos). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \textbf{primosHasta}(3) &= 2 \\ \textbf{primosHasta}(4) &= 2 \\ \textbf{primosHasta}(11) &= 5 \end{aligned}$$

Demuestre que la función **primosHasta**(n) es primitiva recursiva.

Ejercicio 2. Decimos que un programa en $\mathcal{S}$ es *aburrido* si todos sus saltos condicionales usan variables temporales (es decir, en toda línea de la forma IF $V \neq 0$ GOTO A, V es una variable del tipo Z_i).

a. Demostrar que el siguiente predicado es primitivo recursivo:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el programa de número } x \text{ es aburrido} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

b. Demostrar que toda función parcial computable es parcial aburrida computable (es decir, mostrar que para toda función parcial computable hay un programa aburrido que la computa).

Ejercicio 3. Decida y justifique si la siguiente función es computable o no:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si para algún } z \in \mathbb{N},\ \Phi_x^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) < \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Ejercicio 4. Considere la clase de conjuntos $C_n = \left\{x \in \mathbb{N} : \Phi_x^{(1)}(n)\downarrow\right\}$. Decida y justifique si cada uno de los siguientes conjuntos es p. r., computable, c. e., o co-c. e.:

a. $C_\cap = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$

b. $C_\cup = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$