

Recuperatorio de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

13 marzo 2007

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (25 p) Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. La *moda de f en el rango $[a, a + k]$* es el valor que más se repite (o cualquiera de ellos en caso de haber muchos) en

$$\{f(x) : x \in \{a, \dots, a + k\}\}.$$

Mostrar que $\text{moda}_f(a, k) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, el operador de moda de f en el rango $[a, a + k]$, es primitivo recursivo, siempre y cuando f sea una función primitiva recursiva.

Ejercicio 2. (40 p) Sea $B = \{\langle x, y \rangle : W_x \cap W_y = \emptyset\}$.

- a) (20 p) Decidir si \overline{B} es r.e. y demostrarlo.
- b) (20 p) Decidir si B es r.e. y demostrarlo.

Ejercicio 3. (35 p) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \# \text{ ran } \Phi_x > x \text{ (ran } \Phi_x \text{ puede ser } \infty) \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- a) (5 p) Demostrar que existe e tal que $\# \text{ ran } \Phi_e = e + 1$.
- b) (10 p) Demostrar que $\{x : f(x) = 1\}$ no es un conjunto de índices. Recordar que $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto de índices cuando pasa lo siguiente: si $x \in A$ y $\Phi_x = \Phi_y$ entonces $y \in A$.
- c) (20 p) Decidir si la función f es o no computable y demostrarlo.