1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Final - 14/12/2010

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Probar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
   b) Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.
   c) Analizar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ la función f es diferenciable.

2. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(0) = 1$ y $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x > 0$.
   a) Probar que la función $g(x) = x - f(x)$ es inyectiva.
   b) Probar que existe un único $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x_0) = x_0$.

3. Para cada valor de $b \in \mathbb{R}$ encontrar el valor máximo y el valor mínimo que toma la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{b\,y^2}{2},$$

en el disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Sea $g : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2}dt - \int_{-1}^{0} e^{-t^2}dt.$$

   a) Probar que g es una función de clase C^2.
   b) Probar que el polinomio de Taylor de orden 1 de g en $x_0 = 0$ es $P_1(x) = x$.
   c) Encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ el error que se comete al aproximar $g(x)$ por x sea a lo sumo $\frac{1}{100}$.
   d) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $x_0 = 0$?

5. Encontrar todos los $p \in \mathbb{R}$ tales que existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)^p dxdy$$

y calcularlo en ese caso.

Justifique todas sus respuestas.

14/12/10

14/12/10

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Probar continuidad.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ (x,y) \neq (0,0)$, es continua por composición de cocientes continuas.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{\|x,y\|^2} \leq \frac{\|x,y\|^3}{\|x,y\|^2} \leq \|x,y\| < \delta < \varepsilon.$$

(b) $$\lim_{h\to 0} \frac{F((x_0,y_0)+h(v_1,v_2)) - F(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(hv_1)^3}{h \; h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^3} \, v_1^3}{\cancel{h^3} \, (v_1^2+v_2^2)} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - F(0,0) - x \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) - y \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}{\|x,y\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\|x,y\| \; \|x,y\|^2} \qquad (t,0) \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+0^2} \cdot (t^2+0^2)} = \frac{t}{|t|} \cdot \frac{t^2}{t^2} = \frac{t}{t} = \boxed{1 \neq 0}$$

---

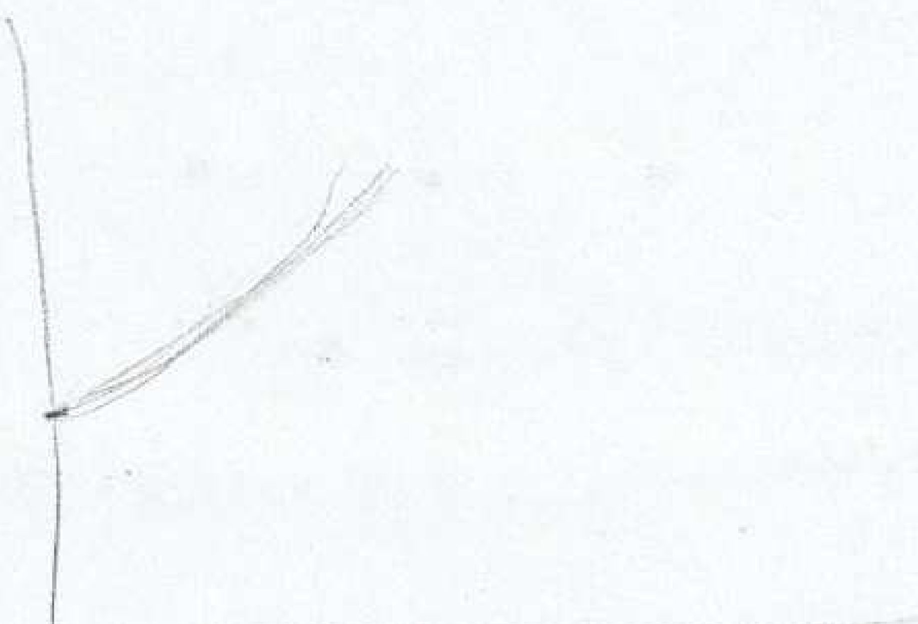
(2) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $(0,\infty)$

$f(0) = 1$

$|f'(x)| \leq 1/2$

$g(x) = x - f(x)$ es inyectable

$\boxed{1/2 \leq g'(x) \leq 3/2}$



f iny $\Rightarrow x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$g'(x) = 1 - f'(x) \geq 1 - 1/2 = 1/2.$

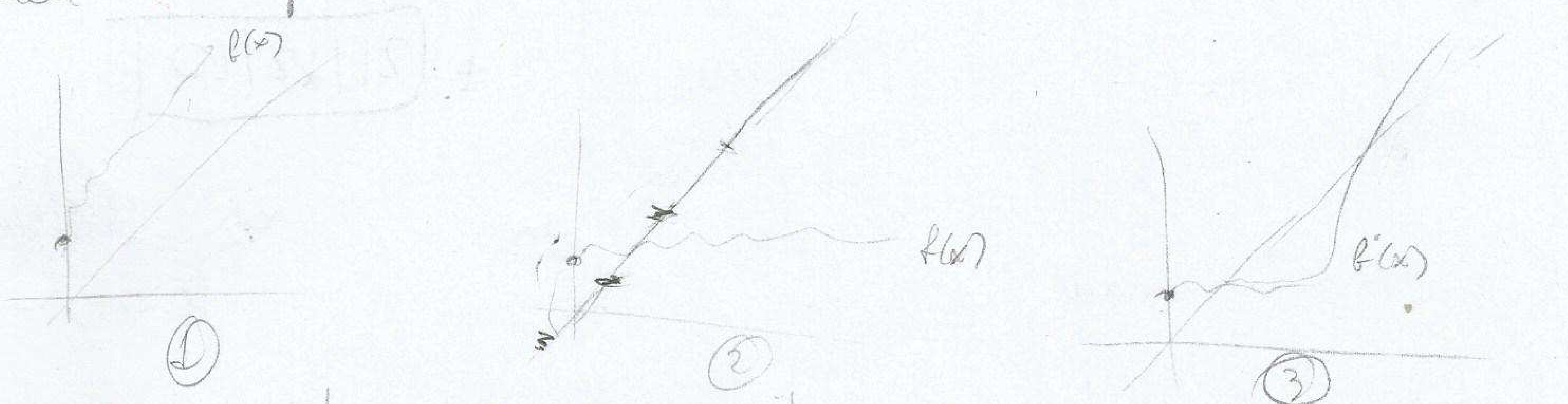
Como $g'(x) > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow g(x)$ es estrictamente creciente

$\Rightarrow x, y \in (0,+\infty) \quad x \neq y \begin{cases} x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Probar que $\exists!\ x_0 : f(x_0) = 1/2$ (2b) 14/12/10

Equivale a cortar sólo una vez la recta $y = x$

Existen 3 opciones:



O sea: se queda siempre arriba,

corta una vez y se queda abajo

corta una vez y vuelve a subir, cortándola de nuevo.

$f(0) = 1 \geq 0 = I(0)$ o (3)

Para que pase (1) deben $\exists$ infinitos puntos tales que $f'(x) \geq I'(x) = 1$. Abs pues $\forall x$ $|f(x)| \leq 1/2$.

14/12/10

(3) ~~Pero~~ $\forall\, b \in \mathbb{R}$ $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{b y^2}{2}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\left(\frac{\cos^2(t)}{2} + \frac{b.\ \text{sen}^2(t)}{2}\right)' = \left(\frac{\cos^2(t) + b\,\text{sen}^2(t)}{2}\right)' = \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$$\frac{2\cos(t).-\text{sen}(t) + b.2\,\text{sen}(t).\cos(t)}{2} = \boxed{(b-1).\text{sen}(t).\cos(t)} = 0.$$

$\forall t.$

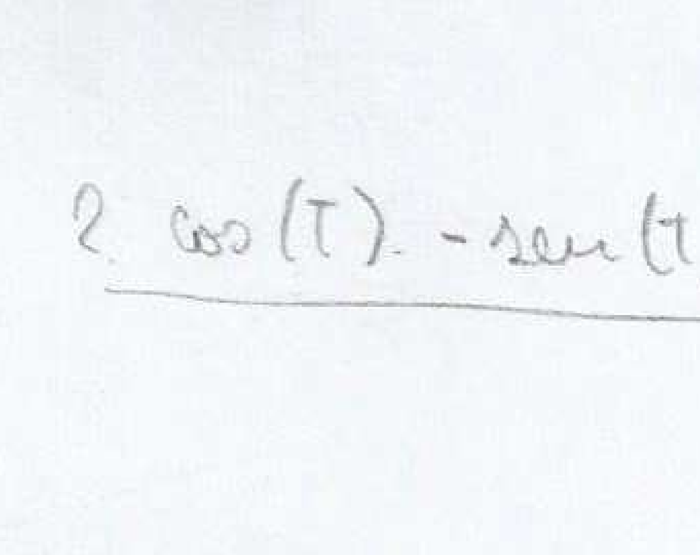
$(b-1).\text{sen}(t).\cos(t) = 0 \iff \boxed{b=1}$ o

$\text{sen}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$ o $\boxed{t = \pi}$

$\cos(t) = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$ o $\boxed{t = \frac{3\pi}{2}}$

$\boxed{b \neq 1.}$

$\boxed{b \neq 0}$



$\nabla f(x,y) = (x, by) \to x = 0$

$\hookrightarrow y = 0$ o $b = 0$

$$\det(Hf(x,y)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = b$$

$b < 0$
$b = 0$
$0 < b < 1$
$b = 1$
$b > 1$

③ continuación

I) $b<0 \Rightarrow$ Ptos críticos son $\{\underbrace{(1,0)}_{\underbrace{\frac{1}{2}}_{Max}}\ \underbrace{(0,1)}_{\underbrace{\frac{b}{2}}_{min}}\ \underbrace{(-1,0)}_{\underbrace{\frac{1}{2}}_{Max}}\ \underbrace{(0,-1)}_{\underbrace{\frac{b}{2}}_{min}}\ \underbrace{(0,0)}_{PS}\}$

II) $b=0 \Rightarrow$ Ptos críticos son $\{\underbrace{(1,0)}_{\underbrace{1/2}_{Max}},\ \underbrace{(-1,0)}_{\underbrace{1/2}_{Max}},\ \underbrace{(0,y)}_{\underbrace{0}_{min}}\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx - C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{c}{(b-a)}\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,\cancel{dx}\ \frac{c}{b-a}\,dx$$

III) $0<b<1 \Rightarrow$ ptos críticos $\{\underbrace{(1,0)}_{\underbrace{1/2}_{Max}}\ \underbrace{(0,1)}_{b/2}\ \underbrace{(-1,0)}_{\underbrace{1/2}_{Max}}\ \underbrace{(0,-1)}_{b/2}\ \underbrace{(0,0)}_{min}\}$

IV) $b=1 \Rightarrow$ ptos críticos $\{\underbrace{(\cos(t),\operatorname{sen}(t))}_{\underbrace{1/2}_{Max}},\ \underbrace{(0,0)}_{\underbrace{0}_{min}}\}$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2) = 1/2$$

V) $b>1 \Rightarrow$ ptos críticos $\{\underbrace{(1,0)}_{1/2}\ \underbrace{(0,1)}_{\underbrace{b/2}_{Max}}\ \underbrace{(-1,0)}_{1/2}\ \underbrace{(0,-1)}_{\underbrace{b/2}_{Max}}\ \underbrace{(0,0)}_{min}\}$

$\square$

---

④

$$\boxed{g(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2}\,dt - \int_{-1}^{0} e^{-t^2}\,dt}$$

$$g'(x) = e^{-x^2}$$

$$g''(x) = e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

$$T_{II}(g) = g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{g''(0)\cdot(x-0)^2}{2}$$

$$= 0 + x + 0 = \boxed{x}$$

b) $T_g(0) = g(0) + g'(0)(x-0)$

$$= \int_{-1}^{0} e^{-t^2}\,dt - \int_{-1}^{0} e^{-t^2}\,dt + e^{-0^2}(x-0)$$

$$= 0 + 1\,x = \boxed{x}$$

c) $|x|<\delta \Rightarrow |g(x)-x| < 1/100 \Rightarrow$ Feo $\left(\left|\int_{-1}^{x} e^{-t^2}\,dt - \int_{-1}^{0} e^{-t^2}\,dt - x\right| < \frac{1}{100}\right.$

$$|x|<\delta \Rightarrow |R_1(g)| < 1/100 = \left|\frac{g''(c)\cdot(x-0)^2}{2}\right| < 1/100$$

$$\left|\frac{-2c\,e^{-c^2}\,x^2}{2}\right| \leq |c|\,|e^{-c^2}|\,|x|^2 \leq |x|^3\,|e^{-x^2}| \leq \frac{|x|^3}{e^{|x|^2}} < \frac{\delta^3}{e^{\delta^2}} < \frac{1}{100}$$

$$\boxed{\delta = 0{,}1}$$