Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre — 2011

Primer parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. (Desigualdad de Sylvester) Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leq \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim W.$$

2. Sean $p, q : V \to V$ dos proyectores.

(a) Muestre que la composición $g \circ f$ puede no ser un proyector.

(b) Pruebe que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(i) $g \circ f$ es un proyector y $f \circ g = g$.

(ii) $\operatorname{im} g \subseteq \operatorname{im} f$.

3. Sea $n \geq 1$. Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales distintos dos a dos y, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, consideremos la función $\varepsilon_i : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon_i(p) = p(x_i)$ para cada $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

(a) El conjunto $\mathscr{B}^* = \{\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]^*_{\leq n}$.

(b) Sea $\mathscr{B} = \{P_0, \ldots, P_n\}$ la base de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ cuya base dual es $\mathscr{B}^*$. Sean $y_0, \ldots, y_n$ números reales y sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i.$$

Muestre que P es el único polinomio de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ tal que $P(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

(c) Pruebe que existen números reales $a_0, \ldots, a_n$ tales que para todo $P \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ se tiene que

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i P(x_i).$$

4. Sea $M \in M_2(\mathbb{R})$ una matriz tal que $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, M \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$ y sea $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ la base dual.

(a) Encuentre las coordenadas en la base $\mathscr{B}^*$ de una base de $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\circ$.

(b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\langle A \rangle^\circ = \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_4, 2\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \rangle$. Muestre que entonces $\mathscr{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

5. Sean $v_1 = (1, -2, 3, 0)$, $v_2 = (2, 4, -1, 1)$, $v_3 = (4, 0, 5, 1)$, $v_4 = (0, 8, -7, 1) \in \mathbb{R}^4$. Determine todos las ternas vectores w_1, w_2 y $w_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con

$$f(v_1) = w_1 - w_2 + 2w_3, \qquad f(v_3) = w_1 + 2w_3,$$
$$f(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \qquad f(v_4) = 4w_3.$$