

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | |

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA:

CARRERA:

E-MAIL:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012

Final (25/6/2013)

1. *Producto de espacios vectoriales:*

Sean V, W K -espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita). Se define el producto cartesiano de V por W :

$$V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}.$$

Este producto cartesiano resulta ser un K -espacio vectorial con las operaciones

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) \text{ y } k \cdot (v, w) = (k \cdot_V v, k \cdot_W w)$$

(no hace falta probarlo).

Exhibir una base de $V \times W$ en función de una base de V y una base de W (demostrar).

¿Cuál es la dimensión de $V \times W$ si V y W tienen dimensión finita?

2. (a) Sea (u_1, \dots, u_n) una base ortogonal de \mathbb{R}^n y sea $U := (u_1 | \dots | u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores (columna) u_1, \dots, u_n . Probar que $|\det(U)| = \|u_1\| \cdots \|u_n\|$.

(Sugerencia: calcular $U^t U$.)

(b) Sea $B := (v_1, \dots, v_n)$ una base de \mathbb{R}^n y sea (u_1, \dots, u_n) la base ortogonal de \mathbb{R}^n que se obtiene aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a B . Probar que para $1 \leq i \leq n$ se tiene $\|v_i\|^2 \geq \|u_i\|^2$, y que $\det(v_1 | \dots | v_n) = \det(u_1 | \dots | u_n)$.

(c) *Desigualdad de Hadamard* (por el matemático francés Jacques Hadamard, 1865-1963):

Probar que para todo $V := (v_1 | \dots | v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son vectores columna cualesquiera, se tiene

$$|\det(V)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|.$$

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matriz que tiene todos los coeficientes iguales a 1.

(a) Probar que A es diagonalizable, y determinar D diagonal y P invertible tal que $D = P^{-1}AP$.

(b) Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Probar que B es diagonalizable, y determinar D diagonal y P invertible tal que $D = P^{-1}BP$.

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS