Clase práctica 7 (computabilidad)
Lógica y Computabilidad

Florencia Savoretti

Repaso *Teorema de la Recursión*
Si $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ es parcialmente computable, existe un e tal que

$$\Phi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = g(e, x_1, \ldots, x_n)$$

Definición:
Un conjunto de programas $A \subseteq \mathbb{N}$ es un *conjunto de índices* si siempre que $P_1 \in A$ y P_2 es tal que $\Phi^n_{P_1} = \Phi^n_{P_2} \Rightarrow P_2 \in A$

Teorema de Rice
Si A es un conjunto de índices tal que $\emptyset \neq A \neq \mathbb{N} \Rightarrow A$ no es computable.

Teorema
A y $\overline{A}$ son r.e. $\Leftrightarrow A$ es computable.

Ejercicio 1.- Mostrar que el conjunto $C = \{x | \Phi_x \text{es primitivo recursivo}\}$ no es computable.
a)Usando el Teorema de la recursión.
b)Usando el Teorema de Rice.

Resolución a)
La función característica de C es:

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x \text{ es primitivo recursivo} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Supongo f_C computable, entonces, $g(x,y)$ es parcialmente computable.

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & si\ f(x) = 1 \\ 1 & sino \end{cases}$$

Como g es parcialmente computable, por Teorema de la Recursión, existe un e tal que

$$\Phi_e(y) = g(e,y) = \begin{cases} \uparrow & si\ f(e) = 1 \\ 1 & sino \end{cases}$$

- $e \in C \Leftrightarrow \Phi_e$ es p.r. $\Leftrightarrow f_C(e) = 1 \Leftrightarrow g(e,y) \uparrow \forall y \Rightarrow \Phi_e(y) \uparrow \forall y \Rightarrow \Phi_e$ no es p.r
- $e \notin C \Leftrightarrow \Phi_e$ no es p.r. $\Leftrightarrow f_C(e) = 0 \Leftrightarrow g(e,y) = 1 \forall y \Rightarrow \Phi_e(y) = 1 \forall y \Rightarrow \Phi_e$ es p.r

Absurdo! que provino de suponer que f_C era computable $\Rightarrow C$ no es computable.
b)
Para ver si podemos aplicar el teorema, primero debemos ver si cumple las hipótesis.
C es un conjunto de índices?
Sea $P_1 \in C$ y sea $P_2 / \Phi_{P_1} = \Phi_{P_2}$ q.v.q. $P_2 \in C$
$P_1 \in C \Leftrightarrow \Phi_{P_1} esp.r.$ y como $\Phi_{P_1}(x) = \Phi_{P_2}(x) \forall x \Rightarrow \Phi_{P_2} esp.r. \Leftrightarrow P_2 \in C$
$\emptyset \neq C \neq \mathbb{N}$?

- Sea $g(x) = 1 \forall x$ es una función p.r. $\Rightarrow \exists n$ tal que $\Phi_n(x) = g(x) \Rightarrow n \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$
- Sea $g'(x) \uparrow \forall x$ no es una p.r., pero tiene un programa que la computa $\Rightarrow \exists m$ tal que $\Phi_m(x) = g'(x) \Rightarrow m \notin C \Rightarrow C \neq \mathbb{N}$

Luego, C es un conjunto de índices no trivial $\Rightarrow C$ no es computable.

Ejercicio 2.-

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x & si\ \Phi_x(y) = y^2 \\ 2x + 1 & sino \end{cases}$$

Decidir si $f(x, y)$ es computable y demostrarlo.

Resolución Supongamos f computable $\Rightarrow g(x)$ tambien lo es

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ f(x, 1) = 2x \\ 0 & sino \end{cases} = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(1) = 1 \\ 0 & sino \end{cases}$$

Consideremos g como la función característica de un conjunto C, o sea, $C = \{x | g(x)\}$
Luego, para ver si g es computable, podemos usar el Teorema de Rice. Es un conjunto de índices?
Sea $P_1 \in C$ y sea $P_2 / \Phi_{P_1} = \Phi_{P_2}$ q.v.q. $P_2 \in C$
$P_1 \in C \Leftrightarrow \Phi_{P_1}(1) = 1$ y como $\Phi_{P_1}(x) = \Phi_{P_2}(x) \forall x \Rightarrow \Phi_{P_2}(1) = 1 \Leftrightarrow P_2 \in C$
$\emptyset \neq C \neq \mathbb{N}$?

- Sea $h(x) = 1 \Rightarrow \exists n \ / \ \Phi_n(x) = h(x) = 1 \forall x \Rightarrow \Phi_n(1) = 1 \Rightarrow g(n) = 1 \Rightarrow n \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$
- Sea $h'(x) = 2 \Rightarrow \exists m \ / \ \Phi_m(x) = h'(x) = 2 \forall x \Rightarrow \Phi_m(1) = 2 \neq 1 \Rightarrow g(m) = 0 \Rightarrow m \notin C \Rightarrow C \neq \mathbb{N}$

pero por Rice, g no es computable *Absurdo!* $\Rightarrow$ C no es computable.

Ejercicio 3.- Demostrar que $C = \{x | Dom(\Phi_x) = \emptyset\}$ no es r.e.

Resolución Veamos que C no es computable:
C es un conjunto de índices?
Sea $P_1 \in C$ y sea $P_2 / \Phi_{P_1} = \Phi_{P_2}$ q.v.q. $P_2 \in C$

$P_1 \in C \Leftrightarrow Dom(\Phi_{P_1}) = \emptyset \Rightarrow \Phi_{P_1}(x) \uparrow \forall x$ y como $\Phi_{P_1}(x) = \Phi_{P_2}(x) \forall x \Rightarrow \Phi_{P_1}(x) \uparrow \forall x \Leftrightarrow Dom(\Phi_{P_1}) = \emptyset \Leftrightarrow P_2 \in C$

- Sea $g(x) = 1 \forall x \Rightarrow \exists n / g(x) = \Phi_n(x) \forall x \Rightarrow Dom(\Phi_n) = \mathbb{N} \neq \emptyset \Rightarrow n \notin C \Rightarrow C \neq \mathbb{N}$
- Sea $g'(x) = \uparrow \forall x \Rightarrow \exists m / g'(x) = \Phi_m(x) \forall x \Rightarrow Dom(\Phi_m) = \emptyset \Rightarrow m \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$

(x Rice)$\Rightarrow C$ no es computable.

$$\overline{C} = \{x | Dom(\Phi_x) \neq \emptyset\} \text{es r.e.?}$$

La función característica de $\overline{C}$ si fuera r.e. sería:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ Dom(\Phi_x) \neq \emptyset \\ \uparrow & sino \end{cases}$$

Versión 1:

```
    Y ← 1
[A] Z_1 ← D
    Z_2 ← 0
    Z_3 ← D + 1
[B] IF Z_3 ≠ 0 GOTO C
        D ← D + 1
        GOTO A
[C] Z_4 ← STP(X_1, Z_1, Z_2)
    IF Z_4 = 1 GOTO E
    Z_2 ← Z_2 + 1
    Z_1 ← Z_1 − 1
    Z_3 ← Z_3 − 1
    GOTO B
```

Versión 2:

```
    Z ← min_p{STP(X, l(p), r(p))}
    Y ← Y + 1
```

Entonces f es parcialmente computable. Luego, $\overline{C}$ es r.e.
Por Teorema, Si $\overline{C}$ es r.e. y C no es computable $\Rightarrow C$ no es r.e.

Ejercicio 4.- Decidir si C es r.e. y demostrarlo.

$$C = \{x | \Phi_x \text{no es total}\}$$

Resolución Supongo C r.e. $\Rightarrow \exists g_c /$

$$g_c(x) = \begin{cases} 1 & six \in C \\ \uparrow & sino \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 5 & g_c(x) = 1 \\ \uparrow & sino \end{cases}$$

Por el Teorema de la Recursión $\exists e / \Phi_e(y) = f(x, y)$
Luego, hay sólo 2 casos posibles:

- e es total $\Rightarrow g_c(e) \uparrow \Rightarrow f(e, y) \uparrow \forall y \Rightarrow \Phi_e(y) \uparrow\ \forall y \Rightarrow e$ no es total. *Absurdo!*
- e no es total $\Rightarrow g_c(e) = 1 \Rightarrow f(e, y) = 5 \forall y \Rightarrow \Phi_e(y) = 5\ \forall y \Rightarrow e$ es total. *Absurdo!*

Que provino de suponer que C es r.e.