PLP - Primer Parcial - 2^{do} cuatrimestre de 2021

Este examen se aprueba obteniendo al menos dos ejercicios bien menos (`B-`) y uno regular (`R`). Las notas para cada ejercicio son: `-`, `I`, `R`, `B-`, `B`. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. Poner nombre, apellido, número de orden y cantidad de hojas en la primera hoja, y numerar las hojas. Se puede utilizar todo lo definido en las prácticas y todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras.
El orden de los ejercicios es arbitrario. Recomendamos leer el parcial completo antes de empezar a resolver.

Ejercicio 1 - Cálculo lambda

Se desea extender el cálculo lambda para poder modelar **Matrices**. Para eso se extienden los tipos y expresiones de la siguiente manera:

$\sigma ::= \cdots \mid \texttt{Matriz}_{\sigma,\underline{\texttt{n}},\underline{\texttt{m}}}$ $\qquad M ::= \cdots \mid \texttt{MAT}_{\underline{n},\underline{m}}(M) \mid M[M][M] \mid M[M][M] := M \mid \texttt{map}\langle M, M\rangle$

donde:

- $\texttt{Matriz}_{\sigma,\underline{\texttt{n}},\underline{\texttt{m}}}$ es el tipo de las matrices de elementos de tipo σ, de $\underline{n}$ filas y $\underline{m}$ columnas.
- $\texttt{MAT}_{\underline{n},\underline{m}}(M)$ es la matriz de n filas y m columnas inicializada en todas sus posiciones con M.
- $M[N][O]$ devuelve el contenido de la matriz M en la posición asociada a la fila N, columna O.
- $M[N][O] := P$ asigna P a la matriz M en la fila N, columna O.
- $\texttt{map}\langle M, N\rangle$ que aplica la función N a la matriz M.

a) Dar las reglas de tipado para soportar los nuevos términos.

b) Describir el nuevo conjunto de valores y dar las reglas de reducción en un paso para los nuevos términos. Los accesos fuera de rango deben reducir a sí mismos, y los elementos que se insertan en una matriz deben reducirse únicamente al momento de ser observados. Se puede suponer que están definidas las operaciones $<$, $=$ y $>$ para términos de tipo Nat. No es necesario escribir las reglas de congruencia (contextuales), basta con indicar cuántas son.

c) Reducir el siguiente término: $\texttt{map}\langle \texttt{MAT}_{\underline{3},\underline{5}}(\mathsf{True})[\underline{1}][\underline{2}] := \mathsf{False}, \lambda x : \mathsf{Bool}. \underline{1}\rangle[\underline{2}][\underline{2}]$

Ejercicio 2 - Inferencia de Tipos

Se desea diseñar un algoritmo de inferencia de tipos para el cálculo lambda extendido con multiconjuntos de la siguiente manera:

$\sigma ::= \cdots \mid \texttt{MultiConj}_\sigma$

$M, N, O ::= \cdots \mid \texttt{Vacio}_\sigma \mid \#(M, N) \mid \texttt{add}\ M\ \texttt{to}\ N \mid M \setminus N \mid \exists x \in M\ \texttt{tal que}\ N$

donde:

- $\texttt{MultiConj}_\sigma$ es el tipo de los multiconjuntos con elementos de tipo σ (conjuntos cuyos elementos podrían aparecer múltiples veces).
- $\texttt{Vacio}_\sigma$ es el multiconjunto de elementos de tipo σ que no contiene ningún elemento.
- $\#(M, N)$ dice cuántas veces está el elemento M en el multiconjunto N.
- $\texttt{add}\ M\ \texttt{to}\ N$ agrega el elemento M al multiconjunto N.
- $M \setminus N$ resta el conjunto M al conjunto N. Esto es, cada elemento de M se remueve de N mientras sea posible, a lo sumo tantas veces como aparezca en M.
- $\exists x \in M\ \texttt{tal que}\ N$ indica si existe en el multiconjunto M algún elemento que cumpla la condición N.

Las reglas de tipado son las siguientes:

$$\frac{}{\Gamma \triangleright \texttt{Vacio}_\sigma : \texttt{MultiConj}_\sigma}(\text{T-Vac}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \texttt{MultiConj}_\sigma}{\Gamma \triangleright \#(M, N) : \mathsf{Nat}}(\text{T-CantApar})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \texttt{MultiConj}_\sigma}{\Gamma \triangleright \texttt{add}\ M\ \texttt{to}\ N : \texttt{MultiConj}_\sigma}(\text{T-Add}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{MultiConj}_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \texttt{MultiConj}_\sigma}{\Gamma \triangleright M \setminus N : \texttt{MultiConj}_\sigma}(\text{T-Resta})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{MultiConj}_\sigma \quad \Gamma \cup \{x : \sigma\} \triangleright N : \mathsf{Bool}}{\Gamma \triangleright \exists x \in M\ \texttt{tal que}\ N : \mathsf{Bool}}(\text{T-Existe})$$

a) Extender el algoritmo de inferencia para admitir las expresiones incorporadas al lenguaje, de tal manera que implemente las reglas de tipado T-Vac, T-Add, y T-Existe (puede suponerse extendido el algoritmo para T-Resta y T-CantApar).

b) Aplicar el algoritmo extendido con el método del árbol para dar el tipo de la siguiente expresión, exhibiendo los pares a unificar en cada paso y las sustituciones utilizadas. De no tipar, indicar el motivo.

$$\exists x \in \texttt{add}\ \mathsf{isZero}(x)\ \texttt{to Vacio tal que}\ x$$

Ejercicio 3 - Subtipado

Se desea extender el cálculo lambda para poder modelar árboles estrictamente binarios con ramas etiquetadas.

Para eso se extienden los tipos y expresiones de la siguiente manera:

$\sigma ::= \cdots \mid \texttt{BT}_{\sigma,\sigma}$

$M ::= \cdots \mid \texttt{Hoja}_{\sigma,\sigma}(M) \mid \texttt{Bin}\ M\ (M, M)\ (M, M) \mid \texttt{map}(M, M, M)$

donde:

- $\texttt{BT}_{\sigma,\gamma}$ es el tipo de los árboles binarios con nodos de tipo σ y etiquetas de tipo γ en sus ramas.
- $\texttt{Hoja}_{\sigma,\gamma}(M)$ es un árbol con un único nodo con valor M.
- $\texttt{Bin}\ R\ (M, E)\ (N, D)$ es un árbol de raíz R, subárbol izquierdo M y subárbol derecho N, con etiquetas E y D conectándolos respectivamente a la raíz.
- $\texttt{map}(M, F, G)$ aplica las funciones F y G a los nodos y etiquetas del árbol M respectivamente.

Las reglas de tipado son las siguientes:

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma}{\Gamma \triangleright \texttt{Hoja}_{\sigma,\gamma}(M) : \texttt{BT}_{\sigma,\gamma}}\text{T-Hoja}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright R : \sigma \quad \Gamma \triangleright P : \gamma \quad \Gamma \triangleright Q : \gamma \quad \Gamma \triangleright M : \texttt{BT}_{\sigma,\gamma} \quad \Gamma \triangleright N : \texttt{BT}_{\sigma,\gamma}}{\Gamma \triangleright \texttt{Bin}\ R\ (M, P)\ (N, Q) : \texttt{BT}_{\sigma,\gamma}}\text{T-Bin}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{BT}_{\sigma,\gamma} \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \to \tau \quad \Gamma \triangleright Q : \gamma \to \delta}{\Gamma \triangleright \texttt{map}(M, N, Q) : \texttt{BT}_{\tau,\delta}}\text{T-MapAB}$$

a) Dar la(s) regla(s) de subtipado y justificar en términos del principio de sustitutividad.

b) Utilizando las reglas de tipado y subtipado, derivar el siguiente juicio de tipado:

$\{\} \triangleright \texttt{map}(\texttt{Bin}\ \mathsf{True}\ (\texttt{Hoja}_{\mathsf{Bool},\mathsf{Float}}(\mathsf{False}), 1.5)\ (\texttt{Hoja}_{\mathsf{Bool},\mathsf{Float}}(\mathsf{True}), 4.2), \lambda x : \mathsf{Int}.\, \mathsf{Succ}(x), \lambda y : \mathsf{Float}.\, y) : \texttt{BT}_{\mathsf{Int},\mathsf{Float}}$

Se cuenta con los axiomas y reglas:

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 1.5 : \mathsf{Float}}\text{T-1.5} \qquad \frac{}{\Gamma \triangleright 4.2 : \mathsf{Float}}\text{T-4.2} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \mathsf{Int}}{\Gamma \triangleright \mathsf{Succ}(M) : \mathsf{Int}}\text{T-SuccInt}$$