2. SERIES

Series útiles:

1. Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \text{ converge} \iff |r| < 1, \text{ y su valor principal (:=vp) es } \frac{1}{1-r}$$

2. Serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n - b_{n+1} \text{ converge} \iff \text{la sucesión } b_n \text{ converge, vp: } b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^r} \begin{cases} si \ \ r > 1 \ \ converge \\ si \ \ r \leq 1 \ \ diverge \end{cases}$$

Proposición:

$$\text{Sea } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \sum a_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Criterios de convergencia (para series de términos positivos):

1. **Comparación:**
   Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tal que $a_n \geq 0$ y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n \ \ \forall\, n \geq n_0$ entonces:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

2. **Comparación por paso al límite:**
   Sea $a_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$; $b_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces:

   i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0; L \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge}$

   ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$

   iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge}$

3. **D'Alembert:**
Sea $a_n > 0 \; \forall \; n$ y sea $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces:

   i) Si $0 \leq L < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

   ii) Si $L > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

   iii) Si $L = 1 \Longrightarrow$ nada puede decirse acerca de la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

4. **Raíz enésima de Cauchy:**
Sea $a_n \geq 0 \; \forall \; n$ y sea $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, entonces:

   i) Si $0 \leq L < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

   ii) Si $L > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

   iii) Si $L = 1 \Longrightarrow$ nada puede decirse acerca de la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

5. **Integral de Cauchy:**
Sea $a_n \geq 0 \; \forall \; n$ y sea $a_{n+1} \leq a_n ; \forall \; n$ (ie, decreciente).
Sea $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ decreciente y tal que $f(n) = a_n \; \forall \; n$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge.}$$

<u>**Series alternadas:**</u>

Se dice **alternada** una serie de la forma $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, a_n$ con $a_n \geq 0 \; \forall \; n$.

Criterio de Leibnitz (para series alternadas):
Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que cumple:

i) $a_n \geq 0 \; \forall \; n$

ii) $a_{n+1} \geq a_n \; \forall \; n$, ie, decreciente

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, a_n \text{ converge.}$$

Definiciones:

1. La serie $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} |a_n|$ converge.
2. La serie $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente si la serie $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n$ converge y $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

Proposición:

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n \text{ converge abosolutamente} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

Series de potencias:

Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ y dado $x_0 \in \mathbb{R}$,
La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_o)^n$ se llama la serie de potencias de $(x-x_0)$.

Lema de Abel:

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_o)^n$, sea $x_1 \neq x_0$ tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x_1-x_o)^n$ converge, entonces:
Para todo $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b < |x_1 - x_0|$ resulta que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_o)^n$ converge absolutamente $\forall\, x \in [x_0 - b; x_0 + b]$.

Proposición:

Dada la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_o)^n$ pasa una de las dos siguientes:

i) $\exists\, r \geq 0$ $(r \in \mathbb{R})$ tal que:
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_o)^n$ converge absolutamente $\forall\, x \;/\; |x-x_0| < r$
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_o)^n$ diverge si $|x-x_0| > r$
   - Nada puede decirse para $x \;/\; |x-x_0| = r$

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_o)^n$ converge absolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $(r=+\infty)$

Nota: r es el radio de convergencia de la serie.

Series con el binomio de Newton:

$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \ \ \forall\, |x|<1 \quad$ *donde* $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}$

Polinomio de Taylor:

Sean $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in (a,b)$; f n veces derivable en x_0,

$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ es el enésimo polinomio de Taylor en $(x-x_0)$ asociado a f.

Fórmula de Taylor:

Sean $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in (a,b)$; f $(n+1)$ veces derivable en (a,b) y $f^{(n+1)}$ continua, entonces:

Para cada $x \in (a,b)$; $x \neq x_0$ $\exists\, c$ entre x y x_0 tal que:

$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \quad$ donde $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Además $\lim_{x\to x_0} \dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

El error de aproximar f por P_n está dado por $|f(x)-P_n(x)| = |R_{n+1}(x)|$

Serie de Taylor asociada a una función:

Sea f indefinidamente derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ consideramos la serie de potencias a la que llamamos serie de Taylor asociada a f: $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Observación:

Sea r el radio de convergencia de la serie de Taylor asociada a f, entonces:

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ para cada $x \in (x_0-r, x_0+r) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} R_{n+1}(x) = 0$

Error para series alternadas:

Sea $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$ convergente, y sea E el error cometido al calcular $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, entonces $|E| \leq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(Más) Series útiles:

1. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$

2. $sen(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. $cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}$

4. $senh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

5. $cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$