Métodos Numéricos
8 de octubre de 2018
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	Lib. Univ. 349/10	Nombre y Apellido Eric Brandwein			
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 24	Ej. 2 20	Ej. 3 22	Ej. 4 16	Nota 82 (Ap)

1. Sean $m, n, s \in \mathbb{R}$ y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Tenemos un producto de matrices $C = AB$ del que sabemos los siguientes hechos:
   - $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times s}$
   - $Ae_1 = (1,1,0)^t$, $Ae_2 = (0,1,1)^t$ y $Ae_3 = (1,0,1)^t$
   - $dim(Nu(C)) = dim(Im(C)) = 2$

   (a) Hallar los valores de $m, n, s \in \mathbb{N}$. (7 puntos)

   (b) Probar que si $Nu(A) = \{0\}$ entonces $Nu(B) = Nu(AB)$. (8 puntos)

   (c) Hallar el rango de B. (10 puntos)

2. Notamos $w_{(k)}$, con $0 \leq k \leq n$, a algún vector en $\mathbb{R}^n$ para el cual $(w_{(k)})_i = 0$ si $i \leq k$, y $(w_{(k)})_i \neq 0$ si $i > k$, es decir, las primeras k componentes de $w_{(k)}$ son nulas y las restantes $n - k$ no lo son.

   (a) Para cualquier $n \geq 2$ y $0 \leq \ell < m \leq n$, probar que la matriz $v_{(\ell)} z^t_{(m)}$ tiene factorización LU sin pivoteo si y sólo si $\ell \leq m$. (13 puntos)

   (b) Para el caso $n \geq 3$ y $\ell > m$, hallar dos factorización LU distintas con pivoteo de $v_{(\ell)} z^t_{(m)}$. (12 puntos)

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible (no necesariamente simétrica), $u \in \mathbb{R}^n$ (u: no nulo) y $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Probar que $\lambda A^t A$ es definida positiva si y sólo si $\lambda > 0$. (10 puntos)

   (b) Probar que si $\lambda > 0$ entonces la matriz $\begin{pmatrix} \lambda A^t A & A^t \\ A & \frac{2(I + uu^t)}{\lambda} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva. (15 puntos)

4. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Hallar un vector $u \in \mathbb{R}^3$ tal que si $H = I - 2\frac{uu^t}{u^t u}$ resulte $HA = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$, es decir $(HA)_{12} = (HA)_{32} = 0$. (7 puntos)

   (b) Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y simétrica, calcular Q^n para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. (4 puntos)

   (c) Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y antisimétrica, calcular Q^n para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. (4 puntos)

   (d) Sean $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una reflexión de Householder y $G(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una rotación de Givens de ángulo θ. Calcular H^{2018} y G^{2018}. (4 puntos)

   (e) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $A = QR$ una factorización QR de A. Hallar una factorización LU (L con unos de la diagonal) de $A^t A$. (6 puntos)