Guía del acotador frecuente

Propiedades función módulo

- $x \leqslant |x|$, $0 \leqslant |x|$
- $|x| = |-x|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x = \text{signo}(x)|x|$
- $|x|^n = |x^n|$
- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$
- $|x| \geqslant y \Leftrightarrow -y \geqslant x \vee x \geqslant y$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \wedge x = -y$

Para acotar

Por arriba

- $\sin(x) \leqslant 1$
- $\cos(x) \leqslant 1$
- $|\sin(x)| \leqslant 1$
- $|\cos(x)| \leqslant 1$
- $|\sin(x)| \leqslant |x|$
- $\sin(x)\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$
- $|\sin(x)| \leqslant |\tan(x)|$
- $|e^x - 1| \leqslant |x|e^{|x|}$
- Desigualdad triangular:

$$||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b|| \qquad ||a - b|| \leqslant ||a|| + ||b||$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|V \cdot W| = |\langle V, W\rangle| \leqslant ||V||\,||W|| \qquad \forall\, V, W \in \mathbb{R}^n$$

- $|x| \leqslant ||(x, y)|| \leqslant \sqrt{n}\,||(x, y)||_\infty = \sqrt{n}\,\text{máx}(|x|, |y|) \Leftrightarrow x^2 \leqslant x^2 + y^2$
- $|y| \leqslant ||(x, y)|| \leqslant \sqrt{n}\,||(x, y)||_\infty = \sqrt{n}\,\text{máx}(|x|, |y|) \Leftrightarrow y^2 \leqslant x^2 + y^2$
- $|e^x| \leqslant e^{|x|}$

Por abajo

- $\sin(x) \geqslant -1$
- $\cos(x) \geqslant -1$
- $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$
- $\cos(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$
- $\sin(x)\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$
- $\sqrt{x} \geqslant \ln(x)$
- $e^x \geqslant 1 + x$
- $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$
- Desigualdad triangular inversa:

$$||a - b|| \geqslant ||a|| - ||b||$$

$$|a + b| \geqslant ||a| - |b|| \qquad |a - b| \geqslant ||a| - |b||$$

- $|a| + |b| \geqslant |a| \Leftrightarrow \frac{1}{|a|+|b|} \leqslant \frac{1}{|a|}$
- $|a| + |b| \geqslant |b| \Leftrightarrow \frac{1}{|a|+|b|} \leqslant \frac{1}{|b|}$
- $||(x, y) - (a, b)||^2 > ||(x, y) - (a, b)||$
- $e^x > 0$
- $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$
- $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geqslant xyz$

Todo

$(x-a, y-b) \neq (0,0)$

- $\frac{|x-a|}{||(x,y)-(a,b)||} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant 1$
- $\frac{|y-b|}{||(x,y)-(a,b)||} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{(y-b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant 1$

Demás cosas

- $(x^2-y^2) = (x+y)(x-y)$
- $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
- $(x-a)^2 = |x-a|^2$
- $(x-a)^3 = |x-a|^2(x-a)$
- Rectas que pasan por el punto (x_0, y_0)

$$y = m(x-x_0) + y_0$$

Si a la hora de demostrar un límite tomamos más de un δ:

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta(\varepsilon)\}$$

Relaciones trigonométricas

- $|\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(|x|)\ \forall\ x \in [-\pi, \pi]$
- $|\cos(x)| = \cos(|x|)\ \forall\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$
- $\tan(x) = -\tan(-x)$
- $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

Límites útiles

- $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0} e^x = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} x\sin(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$
- Si $f(x)$ es acotada y $g(x) \xrightarrow{x\to c} 0$

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$$

Límites iterados (como variables independientes)

- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{y\to b} f(x,y)\Big)$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b}\Big(\lim_{x\to a} f(x,y)\Big)$

Si alguno de ellos no existe, no nos dice nada sobre el límite doble. Si ambos existen y dan distinto, entonces $\nexists$ lím.

- Si $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$
- Si $|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$

Álgebra de límites

- Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$
  - $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f \pm g)(x,y) = a \pm b$
  - $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f \cdot g)(x,y) = ab$
- Si $b \neq 0$
  - $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{a}{b}$

(Se recomienda como fuente de inspiración para demás cotas el teorema de Lagrange y el desarrollo por series de Taylor)