Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

Examen Final. (7/08/18)

1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $g(x,y) = e^{(2x+y)(3x+2y)-1}$ y notemos por S la curva de nivel

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$$

a) Encontrar todos los puntos $P \in S$ para los cuales es posible despejar la variable y en función de la variable x alrededor de P.

b) Probar que la función $f(x,y) = 2x + y$ no alcanza ni máximo ni mínimo en S.

c) ¿Es S acotada?

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos las siguientes hipótesis sobre f:

1. f es continua en (x_0, y_0).

2. Existen ambas derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

3. Existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ en cualquier dirección $v \in \mathbb{R}^2$ unitaria, $\|v\| = 1$

4. Existen ambas derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno del punto (x_0, y_0) y son continuas en (x_0, y_0).

5. f no es continua en (x_0, y_0).

6. $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) \neq (\nabla f(x_0, y_0), v)$ para algún $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$.

a) Si f es diferenciable en (x_0, y_0) ¿Que condición/condiciones anteriores se dan necesariamente?

b) ¿Que condición/condiciones anteriores imposibilita que f sea diferenciable en (x_0, y_0)?

c) ¿Existe alguna condición/condiciones que implique que f sea diferenciable en (x_0, y_0)?

3. Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo.

4. Probar que dado un punto P en una curva de nivel C de una función $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva C en P.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Resolución:

1) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $g(x,y) = e^{(2x+y)(3x+2y)-1}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$

a) Para que $P \in S$ y además sea posible despejar la variable y en función de x alrededor de P, por Teorema de la función implícita, g debe ser C^1 en P y $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$

$\boxed{\text{Cálculo Auxiliar: } (2x+y)(3x+2y)-1 = 6x^2+4xy+3xy+2y^2-1 = 6x^2+7xy+2y^2-1}$

$\nabla g(x,y) = \Big(e^{(2x+y)(3x+2y)-1}\cdot(12x+7y), e^{(2x+y)(3x+2y)-1}\cdot(7x+4y)\Big)$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ existen y son continuas $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g$ es C^1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Ahora solo falta ver para que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0 \iff e^{(2x+y)(3x+2y)-1}\cdot(7x+4y) \neq 0 \underbrace{\iff}_{e^k \neq 0 \forall k \in \mathbb{R}} 7x+4y \neq 0 \iff 4y \neq -7x \iff y \neq -\frac{7x}{4}$

Veamos si los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la forma $y = -\frac{7x}{4} \in S$ o no.

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$

$g(x,y) = 1 \iff e^{(2x+y)(3x+2y)-1} = 1 \iff (2x+y)(3x+2y)-1 = 0$

Si los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la forma $y = -\frac{7x}{4} \in S \Rightarrow (2x-\frac{7x}{4})(3x+2(-\frac{7x}{4}))-1 = 0$

$(\frac{x}{4})(-\frac{x}{2}) - 1 = 0$

$-\frac{x^2}{8} = 1$

$x^2 = -8 \to$ ¡*Absurdo*! ya que $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la forma $y = -\frac{7x}{4} \notin S \Rightarrow$ Los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la forma $y \neq -\frac{7x}{4} \in S \Rightarrow$

$\boxed{P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\} = S}$

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$ y $f(x,y) = 2x+y$

$g(x,y) = 1 \iff e^{(2x+y)(3x+2y)-1} = 1 \iff (2x+y)(3x+2y)-1 = 0 \iff$

$$6x^2+7xy+2y^2=1 \iff 6(x^2+\frac{7xy}{6}+\frac{y^2}{3})=1$$
$$\iff x^2+2\cdot\frac{7xy}{12}+\frac{49y^2}{144}-\frac{49y^2}{144}+\frac{y^2}{3}=\frac{1}{6}$$
$$\iff \Big(x+\frac{7y}{12}\Big)^2=\frac{y^2}{144}+\frac{1}{6}$$
$$\iff \Big|x+\frac{7y}{12}\Big|=\frac{\sqrt{y^2+24}}{12}$$
$$\iff x=-\frac{7y}{12}\pm\frac{\sqrt{y^2+24}}{12}$$

Los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=2x+y$ y además pertenezcan a S son: $Q=\{(x,y)\in S/f(x,y)=2x+y\}$

$$Q=H=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ h(y)=2\Big(-\frac{7y}{12}\pm\frac{\sqrt{y^2+24}}{12}\Big)+y\Big\}$$

Entonces, para probar que f no alcanza ni máximo ni mínimo en S, hay que probar que $h(y)$ no tiene máximos ni mínimos.

$h(y)$ tiene máximos y/o mínimo $\iff h'(y)=0$ para algún $y\in\mathbb{R}$

$$h(y)=2\Big(-\frac{7y}{12}\pm\frac{\sqrt{y^2+24}}{12}\Big)+y$$
$$h(y)=-\frac{7y}{6}\pm\frac{\sqrt{y^2+24}}{6}+y$$
$$h(y)=-\frac{y}{6}\pm\frac{\sqrt{y^2+24}}{6}$$
$$h_1(y)=-\frac{y}{6}+\frac{\sqrt{y^2+24}}{6}\wedge h_2(y)=-\frac{y}{6}-\frac{\sqrt{y^2+24}}{6}$$
$$h_1'(y)=-\frac{1}{6}+\frac{1\cdot 2y}{6\cdot 2\cdot\sqrt{y^2+24}}\wedge h_2'(y)=-\frac{1}{6}-\frac{1\cdot 2y}{6\cdot 2\cdot\sqrt{y^2+24}}$$
$$Dm(h_1'(y))=\mathbb{R}=Dm(h_2'(y))$$

Planteo $h_1'(y)=0$ y $h_2'(y)=0$

$$0=\frac{1}{6}\Big(-1+\frac{y}{\sqrt{y^2+24}}\Big)\wedge 0=-\frac{1}{6}\Big(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+24}}\Big)$$
$$1=\frac{y}{\sqrt{y^2+24}}\wedge -1=\frac{y}{\sqrt{y^2+24}}$$
$$\sqrt{y^2+24}=y\wedge-\sqrt{y^2+24}=y$$

$$y^2+24=y^2\wedge y^2+24=y^2$$

$24=0\wedge 24=0\rightarrow$ ¡*Absurdo*! $\Rightarrow h'(y)\neq 0\ \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow h(y)$ no alcanza ni máximo ni mínimo. $\Rightarrow f$ no alcanza ni máximo ni mínimo en S.

c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$

$g(x,y) = 1 \iff e^{(2x+y)(3x+2y)-1} = 1 \iff 6x^2 + 7xy + 2y^2 = 1 \iff$
$2(y^2 + \frac{7xy}{2} + 3x^2) = 1 \iff y^2 + \frac{7xy}{2} + 3x^2 = \frac{1}{2}$

$$\iff y^2 + 2 \cdot \frac{7xy}{4} + \frac{49x^2}{16} - \frac{49x^2}{16} + 3x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\iff \left(y + \frac{7x}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}$$

$$\iff \left|y + \frac{7x}{4}\right| = \frac{\sqrt{x^2+8}}{4}$$

$$\iff y + \frac{7x}{4} = \pm\frac{\sqrt{x^2+8}}{4}$$

$$\iff y = -\frac{7x}{4} \pm \frac{\sqrt{x^2+8}}{4}$$

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{7x}{4} \pm \frac{\sqrt{x^2+8}}{4}\right\}$$

Llamo $l(x) = -\frac{7x}{4} - \frac{\sqrt{x^2+8}}{4} = -\left(\frac{7x}{4} + \frac{\sqrt{x^2+8}}{4}\right)$

$$\lim_{x \to \infty} l(x) = \lim_{x \to \infty} -\left(\frac{7x}{4} + \frac{\sqrt{x^2+8}}{4}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow l(x)$ no es acotada inferiormente $\Rightarrow l(x)$ no es acotada $\Rightarrow S$ no es acotada.

2) a) 1, 2 y 3. b) 5 y 6. c) 4.

3) Teorema Fundamental del Cálculo: Si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Demostración. Teorema Fundamental del Cálculo.

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underbrace{=}_{[x,x+h]\subseteq[a,b]} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underbrace{=}_{f continua en [a,b]} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \underbrace{=}_{T.V.M.I.} \frac{f(c)\cdot(x+h-x)}{h} = \frac{f(c)\cdot h}{h} = f(c)$$

$\boxed{\text{Teorema del Valor Medio Integral: Dada } f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow \exists c \in (a,b) \ / \int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a).}$

$c \in (x, x+h) \iff c = x + th$ con $t \in (0,1)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} c = x$

$\lim_{h\to 0} c = x \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$. Por ser f continua en $[a,b]$ (y $[x, x+h] \subseteq [a,b]$)

Retomando: $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$ y $\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

□

4.

Demostración. Dado un punto P en una curva de nivel C de una función $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva C en P.

$\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva C en $P = (x_0, y_0) \iff \langle \nabla F(P), (x,y) - (x_0, y_0)\rangle = 0\ \forall (x,y)$ en la recta tangente.

$F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla F(P) \neq 0$. Por lo tanto podemos escribir a F como $F(x,y) = c$

Como $\nabla F(P) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$ y/ó $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$. Voy a tomar $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$ (La demostración es análoga si tomo $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$).

Como F es C^1 y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0 \Rightarrow$ cumple con las hipótesis del Teorema de la función implícita, por lo tanto admite una función $\varphi : U \to V$ tal que $\varphi(x_0) = y_0$ y $\varphi'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}$

La ecuación de la recta tangente está dada por el Polinomio de Taylor de grado 1, centrado en x_0.

$y = \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0)$

$y = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} \cdot (x - x_0) + y_0$

$$(y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(P) = -\frac{\partial F}{\partial x}(P) \cdot (x - x_0)$$

$$(y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(P) + \frac{\partial F}{\partial x}(P) \cdot (x - x_0) = 0$$

$\langle \nabla F(P), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle = 0 \ \forall (x, y)$ en la recta tangente.

$\square$