

---

## Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Recuperatorio del Primer Parcial - 14/7/2017

---

1. Dada  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , sea  $\mathcal{R}$  la relación en  $\mathbb{N}$  definida por:

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow f(n) \mid f(m)$$

- a) Probar que si  $f$  es inyectiva,  $\mathcal{R}$  es una relación de orden.  
b) Si  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  está dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $n\mathcal{R}36$ .

2. Probar que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3. ¿Cuántos anagramas de la palabra CHOCOLATE pueden formarse? ¿Y cuántos con la condición de que las dos letras O no estén juntas?
4. Hallar todos los pares  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tales que  $(a : b) = 18$  y además  $a$  y  $b$  tienen exactamente 21 y 10 divisores positivos respectivamente.
5. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos  $d = (7^n - 5^{n-1} : 7^{n+1} + 5^n)$ .
- a) Probar que  $d \in \{2, 4, 6, 12\}$ .  
b) Probar que si  $n$  es par, entonces  $d = 4$ .
- 

*Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.  
Justifique todas sus respuestas.*