Parcial de computabilidad

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2015

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden. El examen consta de 4 ejercicios de igual valor. Cada ejercicio será calificado con A (aprobado), R (regular) o I (insuficiente), ocasionalmente con un signo - (menos). Para aprobar un parcial es necesario tener al menos dos ejercicios calificados con A o A-. Para promocionar es necesario tener al menos tres ejercicios calificados con A o A- en ambos parciales o sus correspondientes recuperatorios.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 6$ y $f(x+3) = f(x) + f(x+1)^2 + f(x+2)^3$. Demostrar que f es primitiva recursiva.

Ejercicio 2. Decimos que un programa es “vueltero” si en algún lugar de su código aparece la siguiente secuencia de instrucciones:

$$V \leftarrow V + 1$$
$$[L] \text{ IF } V \neq 0 \text{ GOTO } L$$

para alguna variable V cualquiera y alguna etiqueta L que no aparece en las líneas anteriores del código del programa.

Demostrar que el conjunto $\{x \mid x \text{ es el número de un programa “vueltero” }\}$ es primitivo recursivo.

Ejercicio 3. Decidir si el siguiente conjunto es c.e. y co-c.e., c.e. pero no co-c.e., co-c.e. pero no c.e. o ni c.e. ni co-c.e. Justificar la respuesta.

$$A = \{\langle x, \langle y, z\rangle\rangle \,|\Phi_x^{(1)}(y)\downarrow, \Phi_z^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) = \Phi_z^{(1)}(y)\}$$

Ejercicio 4. Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto de números naturales A, definimos la preimagen de A por f como el conjunto $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$.

Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar la respuesta.

a. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función parcial computable y $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto computable, entonces $f^{-1}(A)$ también es un conjunto computable.

b. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función total computable y $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto computable, entonces $f^{-1}(A)$ también es un conjunto computable.