Los números reales

Conjuntos y números

Existen muchos números en el mundo de la matemática, y de tantos que hay también existe una clasificación para los mismos. Vamos a explicarlos desde los más básicos, hasta los llamados números reales (con los que vamos a trabajar casi toda la materia).

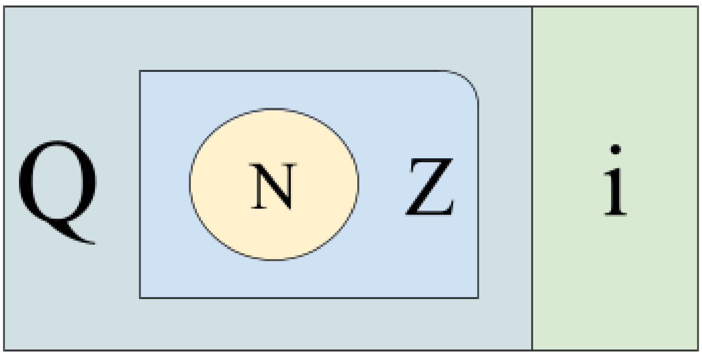
Los números con los que contamos (1, 2, 3, etc…) son los llamados números naturales. Empiezan desde el valor 1, y se van sucediendo en términos de unidades. Nada de comas, ni de signos negativos. A este grupo se lo reconoce por la letra ℕ.

Si a estos positivos, le agregamos sus contrapartes negativas y al número cero, tenemos el grupo de los números enteros. Estos siguen representando unidades, aunque en este caso todos los números tienen un sucesor y un número siguiente. Son representados por la letra ℤ.

Ahora bien, existen números que pueden ser representados cómo la división entre dos números enteros. Se les conoce cómo fracciones (o números con coma, depende cómo se lo escriba) y representan valores entre medio de las unidades antes vistas. Estos números pueden ser números con coma normales o pueden ser periódicos (es decir, que sus dígitos tras la coma se repiten infinitamente). La letra ℚ es usada para referirse a los números racionales (este conjunto).

Hasta este momento cada conjunto contiene, aparte de los números especificados, los números del conjunto anterior. Es decir, los números racionales son fracciones, pero también se le incluyen los enteros (a los cuales, a su vez, se le incluyen los naturales). Pero hay un conjunto de números que no puede representarse cómo una división entre dos números enteros y, a su vez, pueden tener infinitos dígitos tras la coma pero no ser periódicos. Estos se llaman los números irracionales, y están por fuera de los conjuntos antes mencionados, es decir, son algo aparte. Se representan con una ⅈ.

El conjunto que engloba a todos los conjuntos antes mencionados se llama el conjunto de los números reales. Son todos los valores que pueden aparecer en una recta numérica. Nos referimos a este grupo por la letra ℜ.



Cotas superiores e inferiores

Siempre que hablamos de intervalos en la matemática nos referimos a cosas semejantes a lo siguiente: (2, 6). En este ejemplo, se hace referencia al intervalo de números que se encuentra entre el dos y el seis. Dentro de una recta real, eso involucraría a todos los vistos anteriormente.

Una vez especificado eso, hay un par de cosas más que destacar. Los intervalos pueden tener cotas superiores e inferiores. Las cotas son los “límites” de los intervalos, podrían definirse cómo el valor más cercano al último que el intervalo posea. En nuestro caso, la cota inferior sería dos, ya que cualquier número menor a dos ya no pertenece al intervalo. La cota superior, en cambio, sería el seis, porque los mayores ya no se encuentran dentro del grupo. Las cotas también se conocen cómo máximos e ínfimos, hacen referencia a lo explicado antes.

Aparte de los máximos e ínfimos, también existen los supremos y los mínimos. Esto hace referencia al punto más alto (o más bajo) que el intervalo posee. Aunque cabe aclarar que existen dos formas de demarcar un intervalo. Supongamos, que aparte de nuestro primer ejemplo, tenemos también otro intervalo: (2, 6]. La única diferencia es que cambiamos uno de los paréntesis con un corchete, pero este corchete significa que se está incluyendo dentro del intervalo al número que se menciona.

Es decir, que en el primer ejemplo ni el dos ni el seis están dentro del intervalo, los números tienen que ser mayores o menores (respectivamente) para poder entrar. Con el corchete, en cambio, se está incluyendo al seis en el intervalo, por lo que el seis si entraría en este caso (el dos no, porque conserva el paréntesis).

Dicho esto, y retomando, los puntos supremos y mínimos hacen referencia a esos valores. El segundo ejemplo tiene un máximo, el número seis. Es el número más grande que el intervalo puede tomar antes de pasar a la cota superior. El primer ejemplo, por otro lado, no tiene ni supremo ni mínimo, ya que siempre puede haber un número más cerca de los límites.

Valor absoluto

Este término se atribuye a la distancia que hay entre un número y el cero. También se le llama módulo y se escribe con dos rayas junto al número en cuestión: |a|. Siguiendo esta definición, se pueden hacer distintas reglas, por ejemplo:

$$|a| = a, \text{ si a es mayor a 0}$$

$$|a| = \;\; - a, \text{ si a es menor a 0}$$

$$|a| = 0, \text{ si a igual a 0}$$

También existe la distancia entre dos números, y consiste del módulo de la diferencia de los mismos. Es decir, que la cantidad de unidades que hay entre un número y otro, se define cómo:

$$d(a,\ b) = |a - b| = |b - a|$$

En ambos casos, llegaríamos al mismo resultado.

Inecuaciones

Estas son expresiones que funcionan cómo las ecuaciones normales. Una ecuación se define cómo una igualdad en la que tenemos una incógnita, la cual tenemos que resolver. En el caso de las inecuaciones, no tenemos una igualdad, tenemos una desigualdad: símbolos de intervalos (mayor, menor, mayor o igual y menor o igual).

En las inecuaciones, no podremos llegar a un resultado único, sino que conseguiremos un intervalo de posibles respuestas. Por ejemplo:

$$x - 2 \geq 3$$

Lo que haríamos normalmente, sería pasar el dos cambiando el signo al otro lado del igual (o lo que es lo mismo, sumarle a ambos lados un dos). En las inecuaciones, esto está bien, y también se puede hacer. Quedándonos que:

$$x \geq 5$$

Y ahí tendríamos la ecuación resuelta. Podemos ver que en la práctica es lo mismo que una ecuación de toda la vida, aunque hay que tener en cuenta algunas excepciones.

Cuando sumamos o restamos a ambos lados de la desigualdad no pasa nada extraño, eso se comporta exactamente igual que en las ecuaciones. También al multiplicar o dividir por números mayores a cero, eso no genera ningún problema. El detalle está en que, al multiplicar o dividir por números menores a cero, la desigualdad se invierte. Es decir, si antes teníamos que un lado de la desigualdad era mayor que el otro, al multiplicar por un número negativo ambos lados, el lado mayor ahora será el menor. Por ejemplo:

$$-2x \geq 8$$

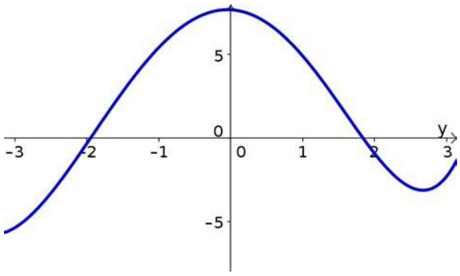
$$x \leq 8 / (-2)$$

$$x \leq -4$$

Funciones

Nociones básicas

Una función es una relación entre dos valores, en la que a cada valor de uno de los conjuntos se le asigna uno y solo uno de los valores del segundo conjunto. Si imaginamos uno de los conjuntos cómo la recta X, y al otro cómo la recta Y, podemos hacer un gráfico representando todos los valores de X cómo entradas y los de Y cómo salidas.



Las funciones se escriben cómo ecuaciones. Las X son las entradas, y los resultados, o las Y, son las salidas. Por ejemplo:

$$y = x^2 - 5$$

Todas las funciones tienen, generalmente, dominio, imagen e intersección con los ejes de coordenadas. El dominio de una función son todos los valores que X puede tomar. Es decir, todos los valores por los que podemos cambiar X y obtener por resultado un número. La imagen, son todos los valores que Y puede tomar, es decir, todos los resultados que se pueden obtener.

Las intersecciones, por último, son puntos en el gráfico. La intersección con el eje Y, si es que existe, es única, ya que una función no puede tomar más de un valor en ese eje. También se le llama orden al origen. Para calcular la ordenada solo tendremos que cambiar las X por cero en la ecuación.

La intersección con el eje X, por otro lado, se le llama raíz, o raíces. Puede existir una sola, al igual que muchas, y al igual que ninguna. Para obtener las raíces, generalmente, solo hay que igualar la cuenta a cero y resolver.

Existen distintos tipos de funciones, dada su estructura, lo cual cambia la manera de graficarlas y los datos a obtener. Ahora haremos un repaso de las funciones más básicas.

<u>**Función lineal**</u>

Esta es la función más básica, ya que su gráfica consiste en una línea recta. La fórmula de la función lineal se define cómo:

$$y = mx + b$$

Donde m y b son números reales, llamados pendiente y ordenada respectivamente. La pendiente define la inclinación de la recta, y la ordenada la ubicación de la misma en el plano. A su vez, b nos marca la intersección con y de la recta.

Con la pendiente podemos encontrar el ángulo que forma la recta con el eje x, ya que:

$$tg(\alpha) = m$$

Dado esto, y si poseemos las coordenadas de dos puntos en el plano podemos afirmar también que:

$$tg(\alpha) = m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se define a los valores de la última fracción cómo el incremento (o variación) de *y* y el incremento (o el incremento) de *x*, respectivamente.

Es posible descubrir b si tenemos un punto de la función y el valor de m. De hecho, es relativamente sencillo. Primero reemplazamos la x y la y con los valores de los puntos, y a la m, quedándonos una ecuación con una variable sencilla. Por ejemplo:

$$P = (1,\ 3)$$
$$m = 2$$

$$3 = 2.1 + b$$
$$3 = 2 + b$$
$$3 - 2 = b$$
$$1 = b$$

También se puede aplicar esta fórmula, y se llegaría al mismo resultado:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si nos dieran un punto de una función, y sabemos la ecuación de otra función que es paralela a la que queremos averiguar, podemos usar la misma lógica del principio. Sabemos que, para que dos funciones sean paralelas, tienen que tener el mismo valor en m, por lo que ambas funciones comparten la m. Sabiendo esto, y teniendo el punto que se nos da, podemos aplicar la fórmula vista anteriormente.

Si solo poseemos dos puntos de una recta, también se puede encontrar la ecuación de la misma. Visto lo visto anteriormente, y reemplazando la m en la fórmula anterior, nos quedaría algo así:

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x + x_2)$$

En el caso de tener un punto de una función, y la ecuación de otra función que es perpendicular, la cosa cambia. Hablar m es un poco más complicado, porque hay que sumarle 90º al otro ángulo para que se mantenga la relación. En conclusión, y sin rodeos, se puede aplicar la siguiente fórmula para hallar m, y una vez obtenido m, seguir cómo habíamos dicho en los casos anteriores:

$$m_s = \frac{1}{m_r}$$

Siendo más la m que queremos hallar, y la otra la que se nos da en la ecuación perpendicular.

Por último, existe una forma algebraica de encontrar los puntos de intersección entre dos funciones. Lo primero que haremos será igualar las ecuaciones a y, de modo que, cómo las dos están igualadas a la misma variable, podemos igualarlas entre ellas. Por ejemplo:

$$f(x) = x - y = -3$$
$$f(x) = y = x + 3$$
$$g(x) = y = 2x$$
$$x + 3 = 2x$$

Fijense que igualamos las dos ecuaciones, porque ambas están igualadas con y, de este modo encontraremos su punto de intersección en el eje x, el cual es 3.

Una vez que obtuvimos el valor de x, solo queda reemplazar cualquiera de las dos ecuaciones con ese valor. Al resolver nos queda seis, por lo que podemos decir que la intersección entre ambas ecuaciones es el punto (3, 6).

Algo a destacar de este último caso, es que pueden surgir tres resultados distintos. Uno es que encontremos el punto de intersección, cómo en el ejemplo visto. En este caso decimos que se trata de un sistema compatible determinado. Si lo que obtenemos son infinitos puntos, es decir, las funciones están superpuestas, el sistema se llama compatible indeterminado. En el caso de que no exista un punto de intersección, es decir, que las funciones sean paralelas, decimos que estamos ante un sistema incompatible.

<u>Función cuadrática</u>

La fórmula de esta función es:

$$ax^2 + bx + c$$

Donde *a* no puede ser 0. El dibujo que nos queda en el gráfico de este tipo de funciones es una parábola. Si el valor de *a* es mayor a cero, la parábola va “hacia arriba” y tiene un punto mínimo. Por otro lado, si el valor de *a* es menor a cero, la parábola va “hacia abajo”, teniendo un punto máximo.

El punto máximo o mínimo es llamado, indiscriminadamente, el vértice de la función, y para hallarlo tenemos que hacer lo siguiente:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c$$

$$V = (x_v, y_v)$$

Este tipo de función, a su vez, puede tener dos raíces, por lo que para hallarlas no podemos simplemente igualar la función a cero, tendremos que usar una fórmula especial; la fórmula cuadrática:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al resolver la parte interna de la raíz, nos pueden ocurrir tres casos distintos. Si nos queda un número mayor a cero, la función va a tener dos raíces distintas y todos contentos. Si nos queda un cero dentro de la raíz, lo que sucede es que la parábola tiene solo una raíz (es decir, su vértice cruza justo por el eje x). Y por último, si lo que termina dentro de la raíz es un número menor a cero, decimos que la función no posee raíz, ya que nunca pasa por el eje x.

Conociendo las raíces, la ecuación se puede factorizar. La factorización se podría definir cómo una reducción de la ecuación de la función, aunque ambas cuentas harían referencia al mismo gráfico. Se escribe de la siguiente manera:

$$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

$$y = a\,(x - x_1)^2$$

Aplicamos la primera en el caso de poseer dos raíces y la segunda en el caso de tener una sola. Si no tuviéramos raíces, la ecuación no se puede factorizar con este método, pero aun así se puede escribir de otra manera.
Sabiendo el vértice, la otra manera de escribir cualquier función cuadrática es:

$$y = a\,(x - x_v)^2 + y_v$$

Esta manera de escribir la función se llama forma canónica.
Teniendo estos datos en cuenta, podemos definir el dominio y la imagen solo con ver la forma canónica de cualquier función. El dominio es todos los reales, ya que abarca todo el eje de x. Y si *a* es mayor a cero, la imagen va a venir desde el mínimo (y_v) hasta infinito. Si, en cambio, *a* es menor a cero, la imagen se forma desde menos infinito, hasta el máximo (y_v).
Es posible hallar los puntos de intersección entre una función lineal y una función cuadrática, de manera bastante parecida a cómo lo explicamos anteriormente. Lo primero que haríamos, sería igualar ambas ecuaciones, por ejemplo:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y = -x + 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = -x + 3$$

Al resolver la igualdad terminamos con lo siguiente:

$$x(x - 3) = 0$$

Lo cual tiene dos resultados (existen dos puntos de intersección entre las funciones), que son 3 y 0. Pueden comprobar que al cambiar la x por esos dos valores la igualdad se cumple. Así se consiguen los valores de x de los puntos de intersección, y para conseguir los de y solo hay que reemplazar la x en cualquiera de las dos ecuaciones y ver el resultado. Tras hacerlo, obtenemos que:

$$P_1 = (3,\ 0)$$

$$P_2 = (0,\ 3)$$

Y ahí los tenemos. Al graficar ambas funciones superpuestas en un gráfico, verificaremos que se intersectan entre sí en exactamente esos puntos.

<u>Función polinómica</u>

Las funciones polinómicas, cómo dice su nombre, son las que están formadas por polinomios. El grado de la x más alta, define el grado de la función, y su forma es así:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Siendo a_n distinto de cero.
Tal y cómo pasaba con la función cuadrática, este tipo de función puede tener varias raíces, solo una o no tener en absoluto. En dicho caso, lo que tendremos que hacer

será reducir la función hasta el grado dos, y luego aplicar lo visto con la función cuadrática.
Para reducir la función, aplicaremos la llamada regla de Ruffini, la cual consiste en una división de polinomios alterada. Supongamos que queremos reducir lo siguiente:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Lo primero que haríamos sería utilizar los coeficientes de las x (es decir, los números que están multiplicando las), los ordenaremos, y los anotaremos en un cuadro. Luego multiplicaremos por un valor y sumaremos el resultado con el siguiente. Lo que queremos buscar es que el último número que nos quede sea cero. Si logramos esto, habremos reducido la ecuación, y los números que nos quedaron serían los coeficientes de la nueva ecuación, ordenados. En el ejemplo, sería algo así:

	1	-1	1	-1
1	↓	+1	+0	+1
	1	0	1	0

En este caso, el número que utilizamos (el 1), es también una raíz. Y cómo de resto nos quedó cero, podemos utilizar nuestra nueva ecuación, la cual quedaría escrita de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2 + 1$$

A esta ecuación reducida, podemos aplicarle la fórmula cuadrática y conseguir las otras dos raíces. Observen que la cantidad de raíces coincide con el grado de la función (tanto en la lineal y en la cuadrática, cómo en la polinómica). Las reglas para la cantidad de raíces son las mismas que en el caso de las cuadráticas. Una vez obtenida la raíz y la ordenada (reemplazando las x por cero, cómo siempre) ya podremos graficar la función.
Esta función, también, se puede factorizar utilizando sus raíces, utilizando el mismo criterio que en el caso anterior. No se puede escribir de manera canónica, ya que este tipo de función no posee vértice.

Función módulo

Es la función con la forma:

$$f(x) = |x|$$

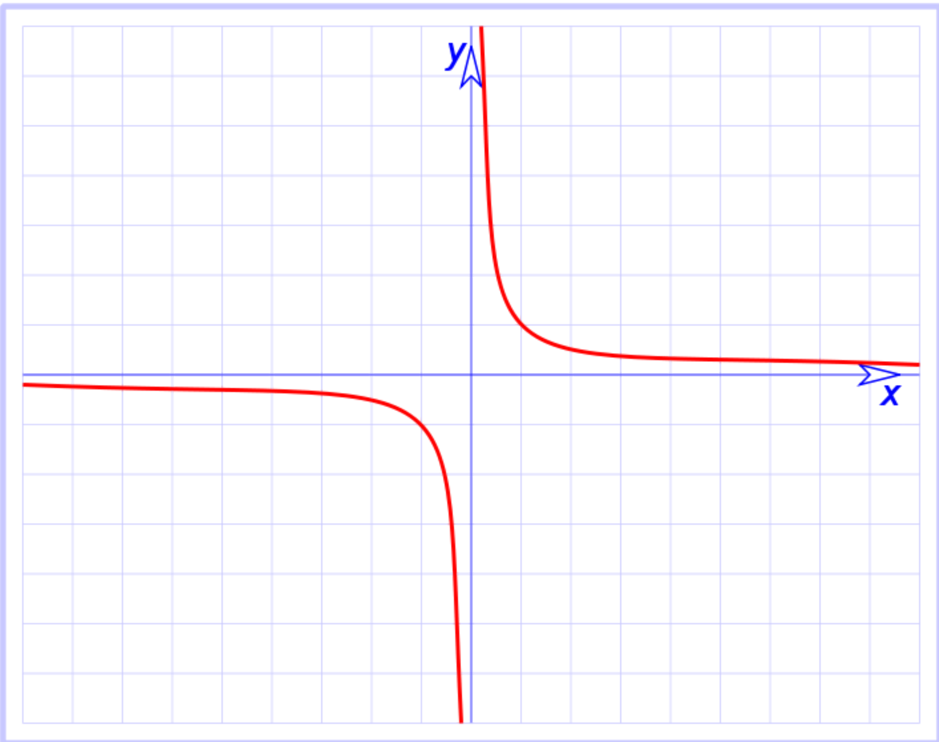
Su gráfica queda cómo una v corta, ya que todos las salidas de la función van a ser positivas. Esta función es parecida a la parabólica, en el gráfico al menos. Puede haber, también, números sumando o restando dentro o fuera del módulo, aunque estos sólo movían la función en los ejes, no cambiarían el gráfico.

Función homográfica

Este último tipo de función tiene una forma:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Donde c no puede ser cero, y la resta entre ad y bc tampoco puede resultar en cero.
El dominio de la función son todos los reales menos en valor de x que provoca que el denominador resulte en cero.
El gráfico que queda de esta función se llama hipérbola, y podemos describirla cómo dos funciones “separadas” o una función “quebrada”.
Las líneas que delimitan donde se corta la función en los ejes *x* e *y* se llaman asíntotas (vertical y horizontal, respectivamente).



En el dibujo podemos ver la función:

$$\frac{1}{x}$$

Para graficarla debemos conseguir no sólo raíz y ordenada, sino también ambas asíntotas. La raíz y la ordenada se buscan cómo en el resto de funciones (igualando a cero y reemplazando la X por cero, respectivamente). Para conseguir las asíntotas se aplican las distintas reglas:

$$AH: \ y = \frac{a}{c}$$

$$AV: x = -\frac{d}{c}$$

A la hora de definir puntos de intersección con una función lineal, se hace cómo en el resto de casos. Primero se igualan las ecuaciones, al resolver nos debería quedar una función cuadrática, por lo que podremos conseguir los dos valores de x de los puntos de intersección. Para conseguir los valores de y, solo tendremos que reemplazar a la x con los valores obtenidos.

Más tipos de funciones

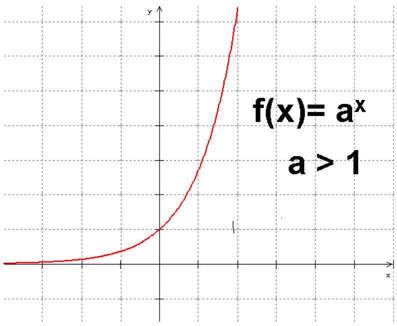
Función exponencial

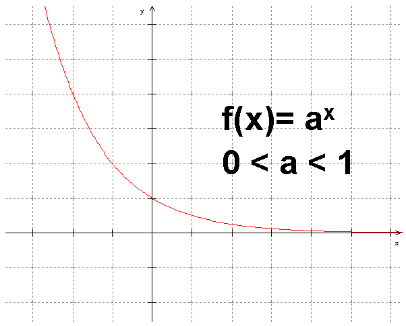
Este tipo de función consiste en la forma:

$$f(x) = a^{x}$$

Siendo *a* mayor a cero y distinto de uno. Puede incluir números sumando o restando en la potencia o por fuera de la misma, aunque estos únicamente trasladaran a la función, no cambiarán su forma.

Existen dos casos para esta función: que *a* sea mayor que uno, o que se encuentre entre cero y uno. En el primer caso la función será creciente y se irá "separando" de la asintonía horizontal. En el segundo, en cambio, la función será decreciente, y por lo tanto cada vez estará más cerca de la asíntota.





En ambos casos la asíntota estaría en cero, aunque esto puede cambiar si la ecuación posee un número sumando o restando por fuera de la potencia.

Función logarítmica

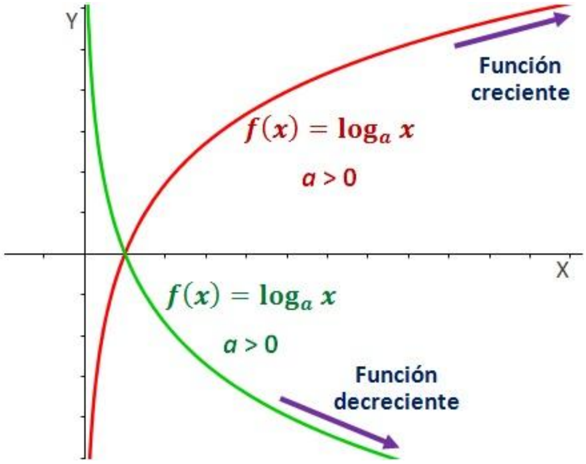
Recordemos la definición de logaritmo:

$$log_{a}(b) = c \Leftrightarrow a^{c} = b$$

Teniendo esto en cuenta, podemos afirmar que la función logarítmica es una función exponencial volteada o "girada". Su forma sería la siguiente:

$$f(x) = log_{a}(x)$$

Donde a es mayor que cero y distinto de uno.



En este caso se repite lo visto con la función exponencial, habiendo dos casos, en los que se distinguen la función creciente y la decreciente. También se repite lo de la asíntota, aunque en este caso es vertical, y esta varía según un número que sume o reste por fuera del logaritmo.

Función compuesta

Las funciones compuestas son dos o más funciones que se combinan para formar una función más grande. El procedimiento es bastante sencillo, supongamos que queremos componer una función F con una función H (con confundir con la composición entre H y F, en este caso, el orden importa).

$$f(h(x)) \neq h(f(x))$$

Lo único que tendremos que hacer es trabajar por capas. Supongamos el primer caso, la composición de f con h. Escribiremos la función f, pero reemplazamos sus variables con la función h (si, la función entera). De ese modo nos quedaría una función bastante más larga conformada en base a las otras dos. El gráfico y las características de la composición serán semejantes pero no iguales a las funciones individuales de las que salieron.

Clasificación de funciones

Funcion inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Las funciones inyectivas son aquellas en las que cada valor de x tiene un único valor en y. Esto significa, que si trazamos una línea paralela al eje x, sea donde sea, esta línea solo va a atravesar en un único punto a la función, nunca dos o más veces. Por ejemplo, las funciones módulo no puede ser inyectiva, ya que son simétricas y eso provoca que un mismo valor de y, posea más de un valor en x.
Las funciones sobreyectivas, por otro lado, son aquellas que ocupan todo el eje y. Es decir, que su imagen va desde menos infinito, hasta más infinito, ocupando todo el plano de arriba a abajo. Por ejemplo, algunas funciones polinómicas, no todas.

Por último, las funciones biyectivas son aquellas que se consideran inyectivas y sobreyectivas a la vez. Un ejemplo de estas, serían las funciones lineales.
Una particularidad de las funciones biyectivas, es que son las únicas que admiten la posibilidad de una función inversa.

Función inversa

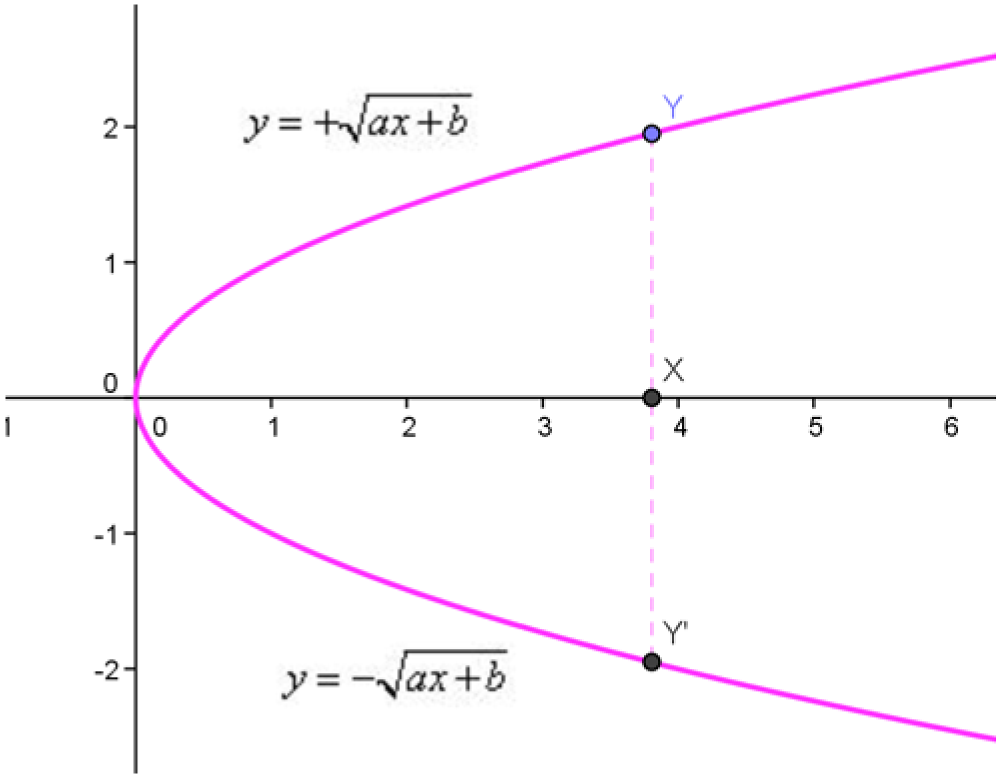
La función inversa consiste en invertir (cómo dice su nombre) el dominio y la imagen de una función. El caso entre la función logarítmica y la exponencial ya lo vimos, y descubrimos que eran inversas la una de la otra. Es decir, si queremos invertir en una función logarítmica, siempre terminaremos con una función exponencial y viceversa. Para hallar una función inversa, lo único que tendremos que hacer es igualar la ecuación a x. Es decir, separar todos los términos que acompañan a la variable x, y se quede “sola” de un lado del igual.
Una vez hecho esto, todos los términos se habrán invertido, y habremos llegado a la función inversa.
Existe un caso especial y es el de la función cuadrática o polinómica, si se dan cuenta su inversa sería una raíz, aunque gráficamente esto sería raro.

Función raíz

La función raíz consiste en una ecuación de la forma:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Existe un problema con esta función y es que tiene dos posibles salidas. Habíamos dicho en la definición de función, que por todas las x siempre obtendremos un único resultado. Pero en el caso de las raíces cuadradas (o pares) existen dos resultados, uno positivo y uno negativo. Gráficamente esto estaría rompiendo con la regla básica de toda función, por lo que al trabajar con este tipo de funciones nos quedamos solo con la salida positiva.
El gráfico se vería así:

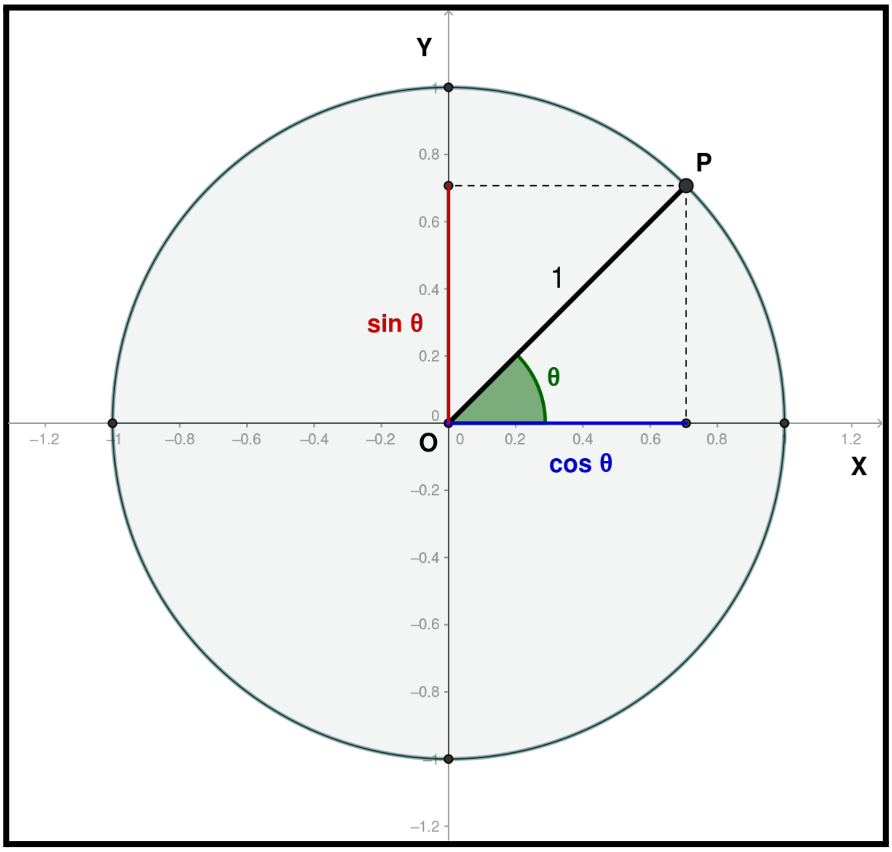


En nuestro caso, solo dibujaremos todo lo que esté por encima del eje x, comenzando desde cero (suponiendo la fórmula básica antes vista).

Todavía más tipos de funciones

Función trigonométrica

Trazamos un círculo de radio uno dentro de unos ejes cartesianos.



Un radiador es una forma de medir ángulos. Consiste en dividir el diámetro del círculo dibujado por el radio. Generalmente, este número se escribe cómo pi en conjunción con otras cuentas. Por ejemplo 2 pi radianes.

Aquí tienen una tabla con las equivalencias con grados normales:

Grados	Radianes
360	2π
180	π
90	$\frac{\pi}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$

30	$\frac{\pi}{6}$

Las funciones trigonométricas son las que x es un ángulo en radianes, siguiendo estas fórmulas:

$$sen\,x = \frac{ordenada\ de\ P}{r}$$
$$cos\,x = \frac{abscisa\ de\ P}{r}$$
$$tg\,x = \frac{ordenada\ de\ P}{abscisa\ de\ P}$$

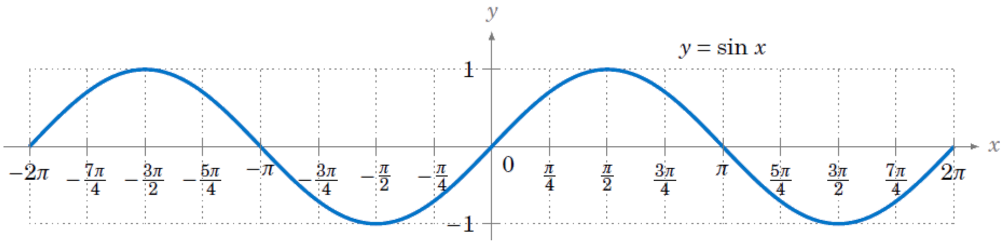
Donde P es el extremo del radio, y la ordenada es su coordenada en y, y la abscisa es la coordenada en X.

Este tipo de funciones tienen una particularidad, y es que generalmente, son periódicas. Definimos a una función periódica cómo una a la que, tras sumarle su periodo (T) a las X, la función gráficamente permanece igual. Es decir:

$$f(x) = f(x + T)$$

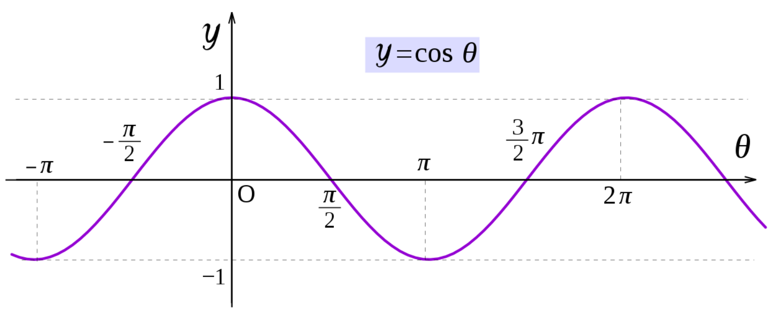
Podemos ver, las funciones trigonométricas más conocidas:

$$sen\,x$$



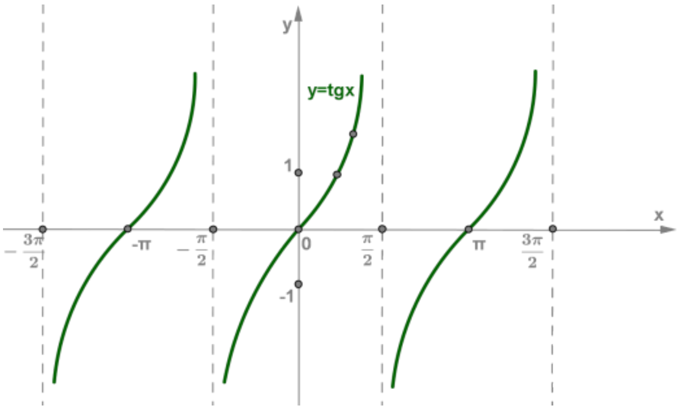
Donde T es 2 pi.

$$cos\,x$$



Donde T es 2 pi.

$$tg\,x$$



Donde T es simplemente pi.
También existen otras, pero estas son las más importantes. Algo a tener en cuenta, más que nada cómo ayuda, es la siguiente tabla, la cual muestra los resultados de radianes y sus ecuaciones trigonométricas generales:

X grados	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
X radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Función partida

Una función partida es, básicamente, un conjunto de funciones que nacen a partir de restricciones. Por ejemplo:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 2 \; si \; x < 2 \\ x \; si \; x > 2 \end{array} \right\}$$

Esta función se leería siguiendo esta lógica: cuando x es menor que dos, en el gráfico aparece la función de arriba; en cambio, cuando x es mayor que dos, vamos a graficar la función de abajo. Se le dice función partida porque está compuesta y escrita "a partes".
Dentro de esta función puede aparecer cualquier otra, ya que más que ser un tipo de función, es una manera de armar un conjunto de ellas.

Límites

Límite sobre un punto

El límite de una función es la tendencia que tiene hacia un valor. Es decir, hacia qué valores se aproxima la función al x aproximarse a otro. Se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Leyéndolo cómo el límite de x tendiendo a *a*.

Para resolver o averiguar el límite de una función, simplemente hay que resolver la cuenta reemplazando la x por números muy cercanos al que se nos dio. Por ejemplo, si nos dicen el número dos, podemos acercarnos a él reemplazando la x por 1,9, o por 1,99, o por 1,999 (a mayor decimales, más cercano es el número), etc. Si se dieron cuenta, también podremos hacer lo mismo desde los números mayores a dos, reemplazando por 2,1, o 2,01, o 2,001, etc.

Esto de acercarse tanto por números menores cómo por mayores es lo que llamamos acercarse por izquierda y acercarse por derecha, respectivamente. También se le conoce cómo límites laterales. Se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Al resolver un límite, generalmente, nos quedarán números normales, es decir, números dentro del plano. Aunque existen casos, en los que el límite nos deja con resultados cada vez más grandes. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Al reemplazar la x por cero, nos queda una cuenta irresoluble. Pero al buscar el límite por izquierda nos darán números negativos cada vez más grandes. Y lo mismo pasa al buscarlos por derecha: números positivos cada vez más grandes. Cómo nunca podremos llegar a un número, lo que decimos es que estos límites son infinitos (respectivamente, menos infinito y más infinito).

En este caso los límites laterales no coinciden, y técnicamente nunca deberían coincidir. Aun así, cuando los dos límites laterales se aproximan al mismo valor, decimos que el límite de esa función es el valor conseguido. No es necesario especificar por izquierda y derecha, si ambos convergen en el mismo número. Por otro lado, si estos valores difieren, si es estrictamente necesario especificar cada uno.

Los límites se pueden aplicar a cualquier tipo de función, incluso las partidas.

Existen propiedades a la hora de buscar límites y trabajar con más de una función, o funciones compuestas. Resulta que, la composición que hagamos con las funciones es totalmente extrapolable al límite. Es decir, si una función se forma tras la división de dos funciones, el límite de la primera función es igual a la división entre los límites de las dos funciones iniciales. Esto funciona así tanto con la composición por suma, resta, multiplicación, división e incluso, potencia.

Límite sobre infinito

Podemos imaginar las funciones cómo máquinas a las que le damos un valor (x) y nos devuelve otro (y). En ese caso, el límite sobre infinito hace referencia a que valor nos devuelve la función si nos acercamos a números cada vez más grandes (tanto positivos cómo negativos).

Volviendo al límite en un punto, nunca nos puede quedar algo cómo cero sobre cero, ya que es una indeterminación. En el caso de infinito pasa algo parecido, y es que nunca podemos tener infinito sobre infinito. Cuando lleguemos a estos casos, habrá que salvar la indeterminación.

Para lograr esto, solo hay que reescribir la función de otra manera (mediante propiedades) para conseguir otra ecuación que, en esencia, valga lo mismo, pero no nos lleve a la indeterminación.

Algunas de las propiedades más usadas al resolver límites son:

- La división entre un número cualquiera (distinto de cero) por un número que tiende a infinito, nos dará siempre cero.
- La división entre un número cualquiera (distinto de cero) por un número que tiende a cero, nos dará siempre infinito.

Vea un ejemplo de una indeterminación de infinito sobre infinito:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4-7x^2+6x}{x^3+2x-1}$$

Si reemplazamos x con infinito, terminaremos en la indeterminación antes dicha. Por lo tanto, vamos a reescribir esta ecuación de otra manera:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(\frac{3x^4}{x^4}-\frac{7x^2}{x^4}+\frac{6x}{x^4}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

Al simplificar lo que está dentro de los paréntesis:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

Al simplificar lo que está afuera:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x(3-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3})}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

En la parte del denominador las fracciones quedan cómo cero, por lo que solo queda un uno, por lo que se va. En el numerador nos queda infinito por tres (las fracciones se van, porque valen cero), lo cual también es infinito. Decimos entonces, que el límite de x tendiendo a infinito es infinito.
El objetivo de todo esto, fue salvar la indeterminación. Fíjese que terminamos con un valor que no es ni infinito sobre infinito ni cero sobre cero, y eso es lo que se busca a la hora de toparse con estos ejercicios.

Continuidad

Una de las características a analizar de las funciones es su continuidad. Este término hace referencia a la extensión del dominio de la función. De manera más vulgar, para que una función sea continua deberíamos poder "dibujar sin levantar el lápiz, más o menos". Ese más o menos es porque es posible hacer ciertos saltos o excepciones (por ejemplo, las funciones logarítmicas son continuas, y las racionales también).
Una función puede ser continua en un punto o continua (a secas). Para que una función pueda ser continua en un punto (a) tiene que cumplir los siguientes requisitos:

- Que exista $f(a)$
- Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$
- Por último, que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si todas las condiciones se cumplen, podemos afirmar que la función es continua en ese punto sin ningún lugar a duda. Si todos los puntos verifican estas reglas, decimos que toda la función es continua.
Si, por el contrario, alguna de las reglas no se cumplen, estamos ante una función discontinua. Vamos a ver dos casos distintos: la discontinuidad esencial (o inevitable) y la discontinuidad evitable.
En el caso de que el límite de la función no exista (y por lo tanto no coincida con la regla tres), estamos ante un caso de discontinuidad esencial. Estos casos no se pueden salvar de ninguna manera, simplemente la función es discontinua.
En el caso de que, en cambio, el límite si exista, pero no coincida con lo planteado en la regla tres, decimos que tenemos un caso de discontinuidad evitable. Lo llamamos evitable porque podemos reescribir la función para que la igualdad se cumpla (hay que aclarar que al "reescribir" la función ya no estaría siendo la misma, sería otra función distinta).

Derivadas

Definición

A la hora de derivar una función lo que hacemos es encontrar una función respecto a la original que nos diga qué tanto cambia el gráfico de dicha función. Es decir, la derivada de una función es otra función, generalmente más sencilla.
Conseguir una función derivada es bastante sencillo, y solo se necesita aplicar la siguiente fórmula:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las derivadas se pueden encontrar de manera general o en un punto específico, reemplazando la x con el valor que se quiera verificar. La derivada general nos dará la derivada que cruza todos los puntos derivados de la función (suponiendo que exista, porque puede que no).
También se puede derivar por términos, cuando la función es muy larga o algo compleja, y siguiendo la tabla a continuación cómo referencia:

Funcion	Derivada
n	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$sen(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-\ sen(x)$

Al trabajar con derivadas, existen distintas propiedades que es muy útil saber, cómo por ejemplo:

$$h(a) = f(a) \pm g(a) \Leftrightarrow h'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$
$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$h(x) = f(x) \,.\, g(x) \Leftrightarrow h'(x) = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$$
$$h(x) = f(x) \,/\, g(x) \Leftrightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \,.\, g(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Polinomio de Taylor

Definición

El polinomio de Taylor es un concepto matemático, el cual hace referencia a transformar una función de cualquier tipo a una función polinómica. Esta fórmula solo aplica para un valor de la función (a elección nuestra, lo llamaremos c de ahora en adelante). Esto de polinizar funciones suena complicado, pero simplemente aplicaremos una sencilla fórmula:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c) . (x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + ... + \frac{f^n(c)}{n!}(x - c)$$

No se ve muy sencilla a primera vista, lo sé, pero lo es. Esta fórmula, al cambiar los datos con una función real, nos devuelve otra función que, a medida que *n* sea más y más grande, coincide más con la función original. El grado del polinomio de Taylor es cómo llamamos a *n*.

Cómo dijimos antes, al aumentar *n*, aumenta también la exactitud con la que el polinomio de Taylor se aproxima a la función original, y esto se debe a que al agregar *n*, se agregan términos al polinomio.

A la hora de resolver ejercicios, generalmente nos pedirán dos cosas. O encontrar el polinomio de Taylor de una función y con un determinado grado *n*, o bien encontrar la fórmula general del polinomio de Taylor de esa función.

Supongamos el primer caso. Queremos averiguar el polinomio de Taylor de grado 3 de la función:

$$f(x) = e^x$$

Y nuestro valor a usar es:

$$c = 0$$

Cómo sabemos que queremos llegar al grado tres, necesitaremos las primeras tres derivadas de la función, las cuales son:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
$$f'''(x) = e^x$$

Si, son todas iguales en nuestro caso. Y a su vez, sabemos que:

$$f(0) = e^0 = 1$$

Por lo tanto, ya podemos reemplazar esto con la fórmula mostrada. Nosotros vamos a ir grado a grado para que se entienda el concepto del grado del polinomio:

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

En este caso, ya podríamos imaginarnos una fórmula general para esta función.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n$$

Fijense que es una versión simplificada de la fórmula antes vista, y que nos sirve para cualquier grado, pero solo en esta función y con ese valor a comprobar. Si *c* fuese 1, o cualquier otro número, la fórmula final sería otra. Lo mismo pasa al cambiar la función en sí misma.

Si la función a analizar tuviese finitas derivadas, podríamos usar todas o encontrar la fórmula general. Ese límite no le impide tener un polinomio de Taylor en ninguna función.

Integrales

Definición

Las integrales podrían definirse, a grandes rasgos, cómo la operación inversa a la derivación. Es decir, si derivar consiste en transformar una función en una derivada, al integrar comenzaremos con una función derivada y obtendremos la función original. Cabe aclarar que la función a integrar no le diremos función derivada, será simplemente función o tendrá una letra específica.
Las integrales se notan:

$$F(x) \ = \ \int_b^a f(x)\, dx$$

Siendo la S estirada el símbolo de la integral (más adelante explicaremos los números que tiene arriba y abajo). El *dx* al final, significa diferencia de *x*. En general no se usa y está más por notación, pero para algunas propiedades de las derivadas nos es de utilidad saber que está ahí.
Las integrales se dividen en dos tipos, dependiendo de si contienen o no los valores a y b. Si no tienen esos números escritos, se trata de una integral indefinida. Por otro lado, si los tiene, decimos que es una integral definida.

Indefinidas

Estas integrales son las más sencillas. Cómo dijimos antes, estas no poseen los números en la S estirada, por lo que nuestra única tarea será integrar la función en cuestión. Es decir, hacer el proceso inverso a la derivación.
Por ejemplo, supongamos que nos dan a integrar:

$$F(x) \ = \ \int 2x\, dx$$

En este caso, tendremos que encontrar la llamada función primitiva (es decir, la original) de 2x. O sea, hay que hallar una función que al derivarla nos dé por resultado 2x. Esto lo pueden hacer viendo la tabla de derivadas y hacer un proceso inverso (también podrían armarse una tabla de integrales, lo cual sería muy útil).
A primera vista, alguien podría decir que la integral de la función sería:

$$F(x) \ = \ x^2$$

Y estarían en lo correcto, pero hay un problema, y es que también podría escribirse:

$$F(x) \ = \ x^2 \ + \ 6$$

O:

$$F(x) \ = \ x^2 \ - \ 189$$

O inclusive:

$$F(x) = x^2 + \pi$$

Creo que quedó claro el punto. Junto a la variable al cuadrado puede haber cualquier número. Ya que la derivada de un número es cero, por lo que satisface la integral. En estos casos, lo escribimos de la siguiente manera:

$$F(x) = x^2 + C$$

Siendo C, una constante.

Una vez escrito esto, habremos obtenido la integral de la función. Fijense que no decimos que la función que nos dan es una derivada, ya que todas las funciones se pueden derivar y todas se pueden integrar. De hecho, a la función integrada la reconocemos por F mayúscula.

También puede ser que nos pidan integrar una función en un punto definido, con lo que podríamos conseguir C. Por ejemplo:

$$F(x) = \int 2x\, dx$$

Y sabemos que:

$$F(2) = 5$$

En este caso tendríamos que encontrar la derivada cómo hicimos antes:

$$F(x) = x^2 + C$$

Y reemplazar la X para encontrar C, con lo que obtendremos:

$$5 = 2^2 + C$$
$$5 = 4 + C$$
$$5 - 4 = C$$
$$1 = C$$

Por lo tanto, podríamos definir nuestra integral cómo:

$$F(x) = x^2 + 1$$

<u>Definidas</u>

Las integrales definidas, por otra parte, son las que contienen los números encima y debajo de la S estirada. Podríamos considerar estos dos números cómo límites de la integral, algo así cómo “define la función desde el punto a hasta el punto b”. Esto se usa mucho, generalmente, a la hora de calcular áreas que encierran dos o más funciones, ya que nos da un valor concreto. Así es, no obtenemos cómo resultado una función nueva, sino un valor determinado.

Resolvamos la integral vista antes, pero definida entre 2 y 5.

$$F(x) = \int_{2}^{5} 2x\,dx$$

En este caso quedaría escrito así, con el número mayor encima.
Para resolver este tipo de integrales, primero deberemos obtener la integral de la función (en nuestro caso 2x) tal y cómo hicimos antes. Ya sabemos el resultado, el cual es:

$$F(x) = x^2 + C$$

Ahora bien, lo que vamos a hacer con los numeritos de la S estirada, es reemplazar a la X por dichos valores, y resolver la ecuación. Deberían quedarnos dos cuentas parecidas a:

$$F(5) = 5^2 + C = 25 + C$$

Y:

$$F(x) = 2^2 + C = 4 + C$$

Una vez obtenidas ambas cuentas, lo que haremos será restarlas (la mayor va primero, por eso va encima de la S estriada). Nos debería quedar algo semejante a lo siguiente:

$$25 + C - (4 + C)$$

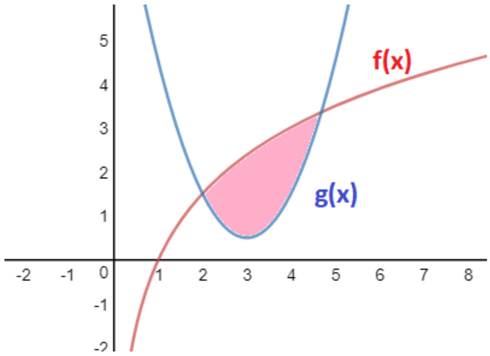
Si se dan cuenta, ambas C se anulan, por lo que solo nos quedarían los valores concretos, terminando con una cuenta bastante sencilla.

$$25 - 4 = 21$$

Entonces, habremos resuelto la integral definida de la función. El resultado es 21. Ese 21 lo que nos está diciendo es el área que engloba la función desde los puntos especificados.
Si quisieramos ver el área englobada entre dos funciones, tendriamos que escribirlo de la siguiente manera:

$$\int_{b}^{a} (f(x) - g(x))dx$$

Siendo a y b los puntos en X donde las funciones se cruzan. También hay que tener en cuenta que la función que va primero sería la función que pasa por encima del área (o función “techo”), y la segunda la que pasa por debajo (o función “piso”). Si se tuviesen muchas áreas, o muchas funciones, lo que haríamos sería trabajar por secciones, para conseguir el área de dichas partes, y luego sumarlas para obtener el área total.


f(x)
g(x)

Sucesiones

Definición y notación

Las sucesiones (o series) son cómo funciones, pero su dominio consiste sólo en los números naturales. Por este mismo motivo, si quisiéramos graficar una sucesión veríamos que no nos queda una línea, sino puntos inconexos. A veces incluso se grafica a las sucesiones en una sola dimensión, especificando el punto del que se habla.
Cabe destacar que la imagen de la sucesión no tiene ningún tipo de restricción, pudiendo ser solo los naturales o, cómo es habitual, los reales en su totalidad.
Para notar una sucesión la escribimos de la siguiente manera:

$$a(n) = a_n$$

En lugar de las X, usamos una N, para simbolizar a los números naturales. A su vez, a los valores obtenidos de la sucesión los llamamos por la sucesión con el valor como subíndice. Las fórmulas de las sucesiones pueden ser las que se les ocurran, por ejemplo:

$$a_n = a^2 + 1$$

Esta sucesión nos daría todos los cuadrados de los números naturales más uno.
Si bien las sucesiones se ven cómo funciones, no se confundan. Estas no se pueden derivar, invertir, conseguir el límite en un punto, etc. Lo único que se puede hacer (y no siempre) es el límite tendiendo a infinito, y generalmente se obtiene infinito por respuesta.

Resolución

Es posible encontrar una sucesión, por ejemplo:

$$a_n = 1,\ 2,\ 4...$$

Y que se nos pidan dos cosas. O bien, descubrir el siguiente número de la sucesión, o bien la fórmula general que sigue la serie.
Lo primero que pensaremos será una de dos cosas al ver la sucesión del ejemplo que dimos. El siguiente número es 8, o el siguiente número es 7. Vamos a ir de a uno.
Supongamos que creímos que el siguiente número es 8, ¿por qué?. La lógica que habremos usado será que cada número es el doble del anterior. Por lo tanto, la fórmula tras pensarla un poco nos quedaría así:

$$a_n = 2^{n-1}$$

Ahora bien, supongamos que pensamos que el número siguiente es 7. En este caso nos habremos dado cuenta que la diferencia entre los números va incrementando.

Uno más uno es dos. Dos más dos es cuatro. Por lo tanto, cuatro más tres debería ser el siguiente (y así llegamos a 7).
En este caso, la fórmula si bien es algo más complicada, quedaría algo así:

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

Ambas respuestas son correctas si se tiene la información provista. En realidad, con cuatro números de una sucesión ya deberíamos ser capaces de encontrar una y solo una solución, aunque es posible que una serie posea varias fórmulas. O incluso, que no posea fórmula alguna.
No existe una ecuación o procedimiento especial para encontrar la fórmula general de una sucesión. Lo mejor para estos casos es pensar en la lógica que hay detrás de la serie. Por ejemplo, en el ejemplo que dimos, cuando creímos que el siguiente número era 8, lo que hicimos fue pensar cómo haríamos para que cada número sea el doble del anterior. Entonces recordamos las potencias de dos, las cuales incrementan cada vez el doble del valor anterior.

<u>Recursividad</u>

Las sucesiones recursivas son las que en su notación se definen por sus valores anteriores o posteriores. El ejemplo más conocido de sucesiones recursivas es el de la sucesión de Fibonacci, la cual se define cómo la suma de los dos números anteriores. Escrita de manera algebraica quedaría de la siguiente manera:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_1 = f_2 = 1$$

Estas sucesiones son muy interesantes para analizar. La única restricción que tienen las sucesiones recursivas, es que debido a cómo están hechas, es necesario especificar un punto de partida. Fijense que en nuestro ejemplo tuvimos que especificar que los dos primeros valores eran uno, ya que sino no se podría empezar nunca. Otro ejemplo de sucesión recursiva podría ser:

$$a_n = 2a_{n-1}$$
$$a_1 = 1$$

En este caso, están viendo una sucesión donde cada número es el doble del anterior, comenzando desde uno.

<u>Sucesiones partidas</u>

Por último, también es posible encontrar sucesiones partidas. Estas son algo complicadas de encontrar, porque cualquier sucesión que se les ocurra podría definirse cómo una serie partida.
Un ejemplo para que vean puede ser:

$$a_n \quad \begin{cases} n \ + \ 1 \, si \, n \ < \ 5 \\ 2n \, si \, n \ > \ 5 \end{cases}$$