Lógica y Computabilidad
1^{er} cuatrimestre de 2005
Práctica 8

Enrique A. Tobis

Las explicaciones que siguen son en mayor o menor grado de desarrollo, las ideas que tuve para resolver los ejercicios de las prácticas de Lógica y Computabilidad cuando fui ayudante en la materia. Además de mis ideas, incorporan cambios y correcciones que me fueron sugiriendo los estudiantes. SE PRESENTAN SIN NINGÚN TIPO DE AVAL DE LA FCEN, ni garantía de correctitud. Por supuesto, puse mi mejor fe en hacerlas, pero no me puedo hacer responsable por errores u omisiones que el lector encuentre en ellas.

Desde ya, toda corrección, sugerencia o comentario que desee hacerme llegar será bienvenido. Me puede contactar escribiendo a **etobis@dc.uba.ar**.

Ejercicio 1

1. Esta definición no es por recursión primitiva: la llamada recursiva DEBE ser con x e y.

2. Si tomamos $h(x) = \psi(x)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = u_2^3(x_1, x_2, x_3) + \varphi(x_3, x_1)$, se ve que ambas son totales. Ahora, podemos reescribir $f(x, 0) = h(x)$ y $f(x, y+1) = g(y, f(x, y), x)$, con lo cual, nos habían dado una definición por recursión primitiva.

3. Si tomamos $h(x) = \varphi(0, x)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_2, s(x_1))$, se ve que ambas son totales. Ahora, podemos reescribir $f(x, 0) = h(x)$ y $f(x, y + 1) = g(y, f(x, y), x)$, con lo cual, nos habían dado una definición por recursión primitiva.

Ejercicio 2

1. $\text{máx}(x, y) = y + (x \dot{-} y)$

2. $\text{mín}(x, y) = x - (x \dot{-} y)$

3. Para resolver esto, observemos que un número es par si y sólo si su antecesor no lo es. Entonces, definimos $\text{par}(0) = 1$, $\texttt{par}(y + 1) = 1 \dot{-} \text{par}(y)$.

4. $\text{hf}(0) = 0$, $\text{hf}(y + 1) = (1 + \text{hf}(y))(1 \dot{-} \text{par}(y)) + \text{hf}(y)\text{par}(y)$.

5. $$\text{sqrt(x)} = \min_{0 \leqslant i \leqslant x} ((i + 1)^2 > x)$$

6. $\text{psq}(x) = (\text{sqrt}(x) = x)$.

Ejercicio 3

1. $f(x, 0) = (x = 0) + x(x \neq 0)$, $f(x, y+1) = g(y, f(x, y), x)$, donde $g(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \neq 0)(x_3 \times x_2) + (x_3 = 0)$.

2. Definimos la función auxiliar $f'(x, 0) = x$, $f'(x, y + 1) = g(y, f'(x, y), x)$, donde $g(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_2}$. Ahora definimos $f(0) = 0$ y $f(y + 1) = f'(y + 1, y + 1)$.

Ejercicio 4

1. Podemos definir $f_1'(x, 0) = x$, $f_1'(x, y + 1) = g(y, f_1'(x, y), x)$, donde $g(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_2)$. Así, $f_1(x) = f_1'(x, x)$.

2. Podemos definir $f_2'(x, 0) = \psi(x) + (x \neq 0)$, $f_2'(x, y + 1) = g(y, f_2'(x, y), x)$, donde $g(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_2) + 1$. Así, $f_2(x) = f_2'(x, x)$.

3. Para empezar, podemos observar que $f(x, 0) = \varphi(x, 0)$ y $f(x, y + 1) = f(\varphi(x, y + 1), y)$. Lo que tendríamos que hacer es intercambiar el orden de f y de φ. Para eso, vamos a hacer un truquito. Definimos $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(x_2, x_4 \dot{-} x_1)$. Esta g es primitiva recursiva. Ahora, definimos $f_3'(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, $f_3'(x, y, i + 1) = g(i, f_3'(x, y, i), x, y)$ y vemos que f' es primitiva recursiva. Ahora, $f_3(x, y) = f_3'(x, y, y)$.

Ejercicio 5

1. $$f(x) = \sum_{i \leqslant x} (g(i) > 3)$$

2. $$f(x) = \prod_{x \leqslant i \leqslant y} (g(i + 1) > g(i))$$

3.

$$f(x) = (x \leqslant y) \left(\left(\sum_{x \leqslant i \leqslant y} (g(i) = w) \right) > 0 \right) \left(\prod_{x \leqslant i \leqslant y} (g(i) \leqslant w) \right)$$

Ejercicio 6

1.

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, \ldots, x_n, 0) & = & g(x_1, \ldots, x_n, 0) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) & = & (g(x_1, \ldots, x_n, y+1) < f(x_1, \ldots, x_n, y)) f(x_1, \ldots, x_n, y) \\ & & +(g(x_1, \ldots, x_n, y+1) \geqslant f(x_1, \ldots, x_n, y)) g(x_1, \ldots, x_n, y+1) \end{array}$$

2.

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) = (b(y) \leqslant t(y))(\max_{0 \leqslant i \leqslant t(y)} [(b(y) \leqslant i) g(x_1, \ldots, x_n, y)])$$

Ejercicio 7 Para usar la sugerencia, notemos que $x^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow x^2 \times 10^n \leqslant 2 \times 10^n$. Con esta observación, vemos que

$$g(n) = \max_{0 \leqslant i \leqslant 2 \times 10^n} i \times (i^2 \times 10^n \leqslant 2 \times 10^n)$$

Ahora, $h(n) = \text{resto}(g(n), 10)$.

Ejercicio 8

1. $\text{shr}(x, n) = \text{hf}^n(x)$, donde hf se definió en el ejercicio 1, inciso 4, y aplicar n veces se definió en el ejercicio 4, inciso 1.
2. $\text{lg}(x)$ no es más que la cantidad de dígitos binario de x. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \text{lg}(0) & = & 0 \\ \text{lg}(y+1) & = & \max_{0 \leqslant i \leqslant y+1} (\text{shr}(x, i) \neq 0) \times i \end{array}$$

3. $\text{dig}(x, n) = 1 \dot{-} \text{par}(\text{shr}(x, n))$.
4.

$$\text{wgt}(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \text{lg}(x)} \text{dig}(x, i)$$

5. Asumiendo que el primer dígito es el menos significativo, $\text{ld}(x) = \text{resto}(x, 10)$.
6. En la teórica se ve como construir $[\frac{x}{y}]$. Con eso, tendríamos una shr10. Con ella podemos definir un lg10, y dig10. Con esto, $\text{fd}(x) = \text{dig}(x, \text{lg10}(x))$.
7. $\text{Pr}(x, y) = \sum_{x \leqslant i \leqslant y} \text{primo}(i)$, donde primo es la f.p.r. que nos dice si un número es primo.
8. Basta definir $G(x, y) = f_1'(x, y)$, donde f_1' se definió en el inciso 1 del ejercicio 4.