Lógica y Computabilidad
1^{er} cuatrimestre de 2005
Práctica 3

Enrique A. Tobis

Las explicaciones que siguen son en mayor o menor grado de desarrollo, las ideas que tuve para resolver los ejercicios de las prácticas de Lógica y Computabilidad cuando fui ayudante en la materia. Además de mis ideas, incorporan cambios y correcciones que me fueron sugiriendo los estudiantes. SE PRESENTAN SIN NINGÚN TIPO DE AVAL DE LA FCEN, ni garantía de correctitud. Por supuesto, puse mi mejor fe en hacerlas, pero no me puedo hacer responsable por errores o omisiones que el lector encuentre en ellas.

Desde ya, toda corrección, sugerencia o comentario que desee hacerme llegar será bienvenido. Me puede contactar escribiendo a **etobis@dc.uba.ar**.

Ejercicio 1

1. Sea v una valuación que satisface p_1 y $\neg p_2$. Entonces, $\max(1 - v(p_1), v(p_2)) = 0$, y v no satisface $(p_1 \to p_2)$.
2. Sea f_1 tal que $f_1(p_i) = 1$ para toda variable. La valuación v_1 que extiende a f_1 satisface a Γ.
3. p_1 y $\neg p_1$ son ambas contingencias, y por ende pertenecen a Γ. Pero si v satisface a p_1, entonces no satisface a $\neg p_1$. Entonces, Γ es insatisfacible.
4. Sea v una valuación cualquiera. v satisface a cada elemento de Γ, y por ende a Γ.

Ejercicio 2

1. Supongamos que v satisface a Γ. Entonces, $v(p_1) = 1$ y $\max(1 - v(p_1), v(p_2)) = 1$. Pero de esto deducimos $v(p_2) = 1)$, por lo cual $p_2 \in C(\Gamma)$.
2. Sea f tal que $f(p_1) = 1$, $f(p_2) = 0$ y $f(p_i) = 0$ para las demás variables. Sea v_f su extensión. Entonces, v_f satisface a Γ, pero no a p_2. Entonces $p_2 \notin C(\Gamma)$.
3. En este caso, $\alpha \in C(\Gamma)$ trivialmente. Como no hay valuación que satisfaga a Γ, "todas ellas" satisfacen a cualquier fórmula.
4. Sea v una valuación que satisface a Γ. v satisface a α por ser tautología. Entonces $\alpha \in C(\Gamma)$.

Ejercicio 3

1. Sea $\alpha \in \Gamma$. Si v satisface al conjunto Γ, satisface en particular a α. Entonces $\alpha \in C(\Gamma)$, lo que prueba la inclusión.
2. Sea $\alpha \in C(C(\Gamma))$. Esto quiere decir que si una valuación v satisface a $C(\Gamma)$, entonces v satisface a α. Sea w tal que satisface a Γ. Entonces, satisface a $C(\Gamma)$, pues satisface a todos sus elementos. Entonces w satisface a α, que entonces pertenece a $C(\Gamma)$. La inclusión $\supseteq$ está dada por el inciso anterior.
3. Como **Form** es insatisfacible (pues contiene a p_1 y a $\neg p_1$, por el inciso d del ejercicio anterior, cualquier fórmula es consecuencia lógica de él.
4. Sea $\alpha \in C(\Gamma_1)$. Sea v tal que satisface a Γ_2. Entonces, satisface en particular a Γ_2, luego a Γ_1, y por ende a α.

Ejercicio 4 Sea v una valuación que satisface a Γ. Entonces, satisface a cada fórmula de Γ', luego a Γ'. La recíproca no es cierta, pues $\{p_1\}$ es satisfacible, y $\{p_1\} \subset \{p_1, \neg p_1\}$, y este segundo no es satisfacible.

Ejercicio 5

1. $\subseteq$ es falsa. Por ejemplo, $\Gamma_1 = \{p_1, (p_1 \to p_2)\}$ y $\Gamma 2 = \{\neg p_2\}$. $C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) =$ **Form**, pero $p_3 \notin C(\Gamma_1)$ y $p_3 \notin C(\Gamma_2)$. $\supseteq$ es verdadera. Si $v(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 1$, entonces $v(\Gamma_1) = 1$ y $v(\Gamma_2) = 1$. Entonces, si $\alpha \in C(\Gamma_1) \cup C(\Gamma_2)$, $v(\alpha) = 1$.
2. $\subseteq$ es cierta. Para verlo, sea $\alpha \in C(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, y supongamos que $\alpha \notin C(\Gamma_1) \cap (\Gamma_2)$. Entonces, $\exists v(v(\Gamma_1) \wedge \neg v(\alpha))$ o $\exists w(w(\Gamma_2) \wedge \neg w(\alpha))$. Si $v(\Gamma_1)$, entonces $v(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, pues está incluido en el primero. Entonces, vale también $v(\alpha)$. Esto es un absurdo. Se llega a lo mismo con w. Entonces, α está también en la intersección de las consecuencias.

   $\supseteq$ no vale. Sean $\Gamma_1 = \{p_1 \wedge p_2\}$ y $\Gamma_2 = \{p_1\}$. $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, cuyas consecuencias son todas las tautologías. Ahora bien, $\Gamma_1 \models p_2$, y trivialmente, $\Gamma_2 \models p_2$. Entonces, p_2 está en la intersección de las consecuencias. Sin embargo, no es una tautología.

Ejercicio 6 $\Leftarrow$ vale por el inciso 1 del ejercicio 3. Sea $\alpha \in C(\Gamma)$, y sea v una valuación que satisface a Γ. Entonces, por definición de consecuencia, $v(\alpha) = 1$, para toda $\alpha \in C(\Gamma)$. Entonces, $C(\Gamma)$ es satisfacible. Para responder la pregunta, probamos que $\forall\Gamma P(\Gamma) \Leftrightarrow P(C(\Gamma))$, y nos preguntan qué pasa con $\forall\Gamma\neg P(\Gamma) \Leftrightarrow \neg P(C(\Gamma))$, que se deduce trivialmente de lo que tenemos probado.

Ejercicio 7 Sea v una valuación. Si $v(\alpha) = 1$ o $v(\beta) = 1$, entonces $v(\alpha\star\beta) = 1$ y $v(\alpha\vee\beta) = 1$. Si $v(\alpha) = v(\beta) = 0$, hagamos $\varphi = \alpha\star\beta$. Por la tercera hipótesis, sabemos que de α podemos deducir φ y de β también. Pero eso quiere decir que de φ podemos deducir $\alpha\vee\beta$. Si $v(\varphi)$ fuera 1, también debería serlo en $\alpha\vee\beta$. Entonces, como esto último sería un absurdo, $v(\alpha\star\beta)$ también sería 0. Esto muestra que la estrellita es semánticamente equivalente al $\vee$.

Ejercicio 8 Tomemos como Γ el conjunto de todas las variables proposicionales. Se ve fácilmente que es satisfacible, y que la única valuación que lo satisface es la valuación v_1 que le asigna un 1 a cada variable. Sea α una fórmula. Si $v_1(\alpha) = 1$, entonces $\alpha \in C(\Gamma)$. Si no, está su negación da uno y es la que está. Lo importante aquí fue que reducimos la verificación de deducibilidad a mirar qué pasa con una sola valuación. Esto no siempre será posible.

Ejercicio 9

1) $\Rightarrow$ 2) Sea v una valuación. $v((\alpha\wedge\beta)\to\gamma) = \text{máx}(1 - v(\alpha\wedge\beta), v(\gamma))$. Si $v(\alpha\wedge\beta) = 0$, la valuación da 1. Si $v(\alpha\wedge\beta) = 1$, entonces $v(\alpha) = v(\beta) = 1$, y por la hipótesis, $v(\gamma) = 1$, con lo cual la valuación también da 1.

2) $\Leftrightarrow$ 3) Es la definición del orden que se dio en el ejercicio 15 de la práctica 2.

3) $\Rightarrow$ 4) $[\alpha] \to^* ([\beta] \to^* [\gamma]) = [\alpha] \to^* [(\beta\to\gamma)] = [\alpha\to(\beta\to\gamma)]$ (todas por definición de [ ]) Sea v una valuación. $v(\alpha\to(\beta\to\gamma)) = \text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta\to\gamma)) = \text{máx}(1 - v(\alpha), \text{máx}(1 - v(\beta), v(\gamma))) = \text{máx}\{1 - v(\alpha), 1 - v(\beta), v(\gamma)\} = \text{máx}(\text{mín}(v(\alpha), v(\beta)), v(\gamma)) = 1$ por la equivalencia del inciso anterior.

4) $\Rightarrow$ 1) La expresión de 4) dice que $\alpha\to(\beta\to\gamma)$ es una tautología. Sea v tal que $v(\alpha) = v(\beta) = 1$. Como $1 = v(\alpha\to(\beta\to\gamma)) = \text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta\to\gamma))$ y $v(\alpha) = 1$, la valuación nos da $v(\beta\to\gamma) = \text{máx}(1 - v(\beta), v(\gamma))$, que por el mismo argumento es $v(\gamma) = 1$.

Ejercicio 10

1. Digo que $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_k\}$ es independiente. Para cualquier i, sea v_i la valuación que cumple $v(p_j) = 1 - \delta_{i,j}$. Esto nos da una valuación que satisface a $\Gamma\backslash\{p_i\}$, pero que no satisface a p_i.

2. Cualquier conjunto infinito de variables proposicionales es independiente, por un argumento como el anterior.

Ejercicio 11

1. Supongamos que Σ no fuera independiente. Entonces, $\exists\alpha \in \Sigma$ tal que $\alpha \in C(\Sigma\backslash\{\alpha\})$. Sea v una valuación que satisface a $\Gamma\backslash\{\alpha\}$. Entonces, satisface también a $\Sigma\backslash\{\alpha\}$. Esto quiere decir que también satisface a α. Entonces, $\alpha \in C(\Gamma\backslash\{\alpha\})$, que es un absurdo.

2. Sea α la tautología. Cualquier valuación que satisfaga a $\Gamma\backslash\{\alpha\}$ satisface trivialmente a α. Entonces $\alpha \in C(\Gamma\backslash\{\alpha\})$

3. $C(\Gamma)$ siempre contiene a todas las tautologías, con lo cual se aplica el inciso anterior.

Ejercicio 12 Sea Γ como en el enunciado. Sean $\{p_1, \ldots, p_n\}$ las variables que aparecen en Γ. Supongamos que Γ sea satisfacible, con v una valuación que lo satisface. Asumamos que $v(p_{n+1)} = 0$ (si v no da eso, puedo construir una que sí). Construyo $\Sigma = \Gamma \cup \{p_{n+1}\}$. v satisface a $\Sigma\backslash\{p_{n+1}\} = \Gamma$, pero no a p_{n+1}. Entonces p_{n+1} no está en $C(\Sigma\backslash\{p_{n+1}\})$. Sea $\alpha \in \Gamma$. Sea v una valuación tal que $v(\Gamma\backslash\{\alpha\})$, pero no vale $v(\alpha)$. Armo v' tal que dé lo mismo en las variables de Γ, 1 en p_{n+1} y 0 en el resto de las variables. Entonces, v' satisface a $\Sigma\backslash\{\alpha\}$, pero no a α. Entonces, mostré que Σ es una base. Pero como es estrictamente mayor que Γ, tengo un absurdo, que provino de suponer que Γ era satisfacible.

Bases infinitas satisfacibles son por ejemplo, los conjuntos que tengan a todas las variables proposicionales o a sus negaciones (pero está la variable, o bien esta la negación, pero no ambas).

Ejercicio 13 a)

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p_1 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_1))} \\
\multicolumn{2}{c}{(p_1 \to \neg p_1)} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(p_1 \to p_1)} \\
\neg p_1 & \neg p_1 \\
p_1 & p_1 \\
\neg p_1 & \neg p_1 \\
\times & \times
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\neg(((p_1 \to p_2) \to (p_2 \to p_1)) \to (p_2 \to p_1))} \\
\multicolumn{3}{c}{((p_1 \to p_2) \to (p_2 \to p_1))} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg(p_2 \to p_1)} \\
\neg(p_1 \to p_2) & \multicolumn{2}{c}{(p_2 \to p_1)} \\
p_2 & \multicolumn{2}{c}{p_2} \\
\neg p_1 & \multicolumn{2}{c}{\neg p_1} \\
p_1 & \neg p_2 & p_1 \\
\neg p_2 & \times & \times \\
\times & &
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg((p_1 \to p_3) \to (\neg\neg p_1 \to p_3))} \\
\multicolumn{2}{c}{(p_1 \to p_3)} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(\neg\neg p_1 \to p_3)} \\
\neg p_1 & p_3 \\
\neg\neg p_1 & \neg\neg p_1 \\
\neg p_3 & \neg p_3 \\
p_1 & p_1 \\
\times & \times
\end{array}
$$

Ejercicio 14 a) En este caso, mirando un poco se ve que parece tautología. Veamos un árbol para P y uno para $\neg P$.

$$
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{(\neg(p_1 \vee p_2) \to ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)))} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg\neg(p_1 \vee p_2)} & \multicolumn{3}{c}{((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3))} \\
\multicolumn{2}{c}{(p_1 \vee p_2)} & (p_3 \wedge p_1) & \multicolumn{2}{c}{(p_2 \to p_3)} \\
p_1 & p_2 & p_3 & \neg p_2 & p_3 \\
 & & p_1 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg(\neg(p_1 \vee p_2) \to ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)))} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(p_1 \vee p_2)} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3))} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg p_1} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg p_2} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(p_3 \wedge p_1)} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(p_2 \to p_3)} \\
\neg p_3 & \neg p_1 \\
p_2 & p_2 \\
\neg p_3 & \neg p_3 \\
\times & \times
\end{array}
$$

Del primer árbol deducimos que $P \equiv p_1 \vee p_2 \vee (p_1 \wedge p_3) \vee \neg p_2 \vee p_3$. En realidad, como sabemos que P es una tautología, podemos dar la forma $p_1 \vee \neg p_1 \cdots$ y listo.

b) El problema 12 de la práctica 2 muestra que esta fórmula es una contingencia. Veamos un árbol para P y uno para $\neg P$.

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to p_4)} \\
\neg(\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) & p_4 \\
\neg\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) & \\
\neg p_3 & \\
\neg\neg(p_1 \wedge p_2) & \\
(p_1 \wedge p_2) & \\
p_1 & \\
p_2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\neg((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to p_4)} \\
\multicolumn{3}{c}{(\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3)} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg p_4} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2)} & p_3 \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(p_1 \wedge p_2)} & \\
\neg p_1 & \neg p_2 &
\end{array}
$$

Del primer árbol deducimos que $P \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee p_4$.

c) Veamos un árbol para P y otro para $\neg P$.

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1)} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg((p_1 \to p_2) \to p_1)} & p_1 \\
\multicolumn{2}{c}{(p_1 \to p_2)} & \\
\multicolumn{2}{c}{\neg p_1} & \\
\neg p_1 & p_2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1)} \\
\multicolumn{2}{c}{((p_1 \to p_2) \to p_1)} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg p_1} \\
\neg(p_1 \to p_2) & p_1 \\
p_1 & \times \\
\neg p_2 & \\
\times &
\end{array}
$$

La fórmula es una tautología. $P \equiv \neg p_1 \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee p_1$.

Ejercicio 15 Miramos el árbol de las conjunciones. Los cerrados corresponden a instatisfacibles.

a) $(((p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (p_1 \to p_2)) \wedge (\neg p_1 \to p_2))$

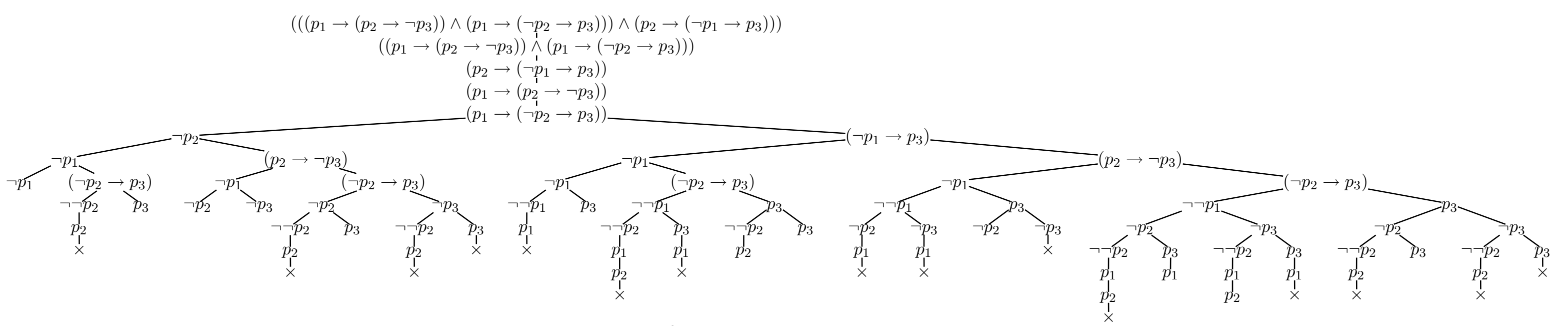
$$((p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (p_1 \to p_2))$$
$$(\neg p_1 \to p_2)$$
$$(p_1 \wedge \neg p_2)$$
$$(p_1 \to p_2)$$
$$\neg\neg p_1 \qquad\qquad p_2$$
$$p_1 \qquad\qquad p_1$$
$$\neg p_2 \qquad\qquad \neg p_2$$
$$\neg p_1 \quad p_2 \qquad \neg p_1 \quad p_2$$
$$p_1 \quad p_1 \qquad \times \quad \times$$
$$\times \quad \times$$

b) $((((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)) \wedge ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)) \wedge (\neg p_3 \to (p_1 \to p_2)))$

$$(((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)) \wedge ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3))$$
$$(\neg p_3 \to (p_1 \to p_2))$$
$$((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2))$$
$$((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)$$
$$\neg\neg p_3 \qquad\qquad (p_1 \to p_2)$$
$$(p_1 \wedge p_2) \qquad\qquad (p_1 \wedge p_2)$$
$$(p_1 \vee \neg p_2) \qquad\qquad (p_1 \vee \neg p_2)$$
$$(p_1 \wedge p_2) \qquad\qquad (p_1 \wedge p_2)$$
$$p_3 \qquad\qquad p_3$$
$$p_3 \qquad \neg p_1 \qquad\qquad p_2$$
$$p_1 \qquad p_1 \qquad\qquad p_1$$
$$p_2 \qquad p_2 \qquad\qquad p_2$$
$$p_1 \quad \neg p_2 \quad p_1 \quad \neg p_2 \quad p_1 \quad \neg p_2$$
$$p_1 \quad p_1 \quad p_1 \quad p_1 \quad p_1 \quad p_1$$
$$p_2 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_2$$
$$\times \quad \times \quad \times \quad \times$$

La valuación que manda p_1, p_2 y p_3 al 1 satisface al conjunto.

c)



La valuación que hace 1 a $\neg p_1$ y a $\neg p_2$ satisface al conjunto.

Ejercicio 16 a) $(((p_0 \wedge \neg p_0) \wedge p_1) \wedge \neg(p_1 \wedge (p_1 \to p_0)))$

$$((p_0 \wedge \neg p_0) \wedge p_1)$$
$$\neg(p_1 \wedge (p_1 \to p_0))$$
$$(p_0 \wedge \neg p_0)$$
$$p_1$$
$$\neg p_1 \qquad \neg(p_1 \to p_0)$$
$$p_0 \qquad p_0$$
$$\neg p_0 \qquad \neg p_0$$
$$\times \qquad p_1$$
$$\neg p_0$$
$$\times$$

b) $((p_1 \wedge (p_1 \to \neg p_0)) \wedge \neg(p_1 \to p_0))$

$$(p_1 \wedge (p_1 \to \neg p_0))$$
$$\neg(p_1 \to p_0)$$
$$p_1$$
$$(p_1 \to \neg p_0)$$
$$p_1$$
$$\neg p_0$$
$$\neg p_1 \qquad \neg p_0$$
$$\times$$

c) $(((p_1 \wedge (p_2 \vee p_0)) \wedge (p_1 \wedge p_0)) \wedge \neg((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0))$

$$
\begin{array}{c}
((p_1 \wedge (p_2 \vee p_0)) \wedge (p_1 \wedge p_0)) \\
\neg((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0) \\
(p_1 \wedge (p_2 \vee p_0)) \\
(p_1 \wedge p_0) \\
(p_1 \wedge p_2) \\
\neg p_0 \\
p_1 \\
(p_2 \vee p_0) \\
p_1 \\
p_0 \\
p_1 \\
p_2 \\
p_2 \qquad p_0 \\
\times \qquad \times
\end{array}
$$

Ejercicio 17

1. Es falso. El único árbol de la fórmula p_1 es ella misma, que es un árbol abierto. Sin embargo, la fórmula no es una tautología.
2. Es falso. El árbol $(p1 \wedge \neg p_1)$ para esa misma fórmula no es cerrado, pero la fórmula es una contradicción. El asunto es que el árbol no está completo.
3. Esta sí es verdadera, y está demostrada en algún lado del apunte.