Lógica y Computabilidad
1^{er} cuatrimestre de 2005
Práctica 1

Enrique A. Tobis

Las explicaciones que siguen son en mayor o menor grado de desarrollo, las ideas que tuve para resolver los ejercicios de las prácticas de Lógica y Computabilidad cuando fui ayudante en la materia. Además de mis ideas, incorporan cambios y correcciones que me fueron sugiriendo los estudiantes. SE PRESENTAN SIN NINGÚN TIPO DE AVAL DE LA FCEN, ni garantía de correctitud. Por supuesto, puse mi mejor fe en hacerlas, pero no me puedo hacer responsable por errores o omisiones que el lector encuentre en ellas.

Desde ya, toda corrección, sugerencia o comentario que desee hacerme llegar será bienvenido. Me puede contactar escribiendo a **etobis@dc.uba.ar**.

Ejercicio 1

1. N, pues no tiene paréntesis exteriores.
2. S, p_1,p_2,p_3,p_4,$(p_2 \to p_3)$,$(p_1 \vee (p_2 \to p_3))$.
3. S, p_1,p_2,$\neg p_1$,$\neg\neg p_1$,$(\neg\neg p_1 \to p_1)$.
4. N, pues no tiene paréntesis exteriores.
5. S, p_1,p_2,p_3,p_5,$(p_2 \to p_3)$,$(p_5 \to p_2)$,$(p_1 \vee (p_2 \to p_3))$.

Ejercicio 2 α es una fórmula del CP sii admite una cadena de formación, que por definición tiene longitud finita. A esa cadena le puedo agregar tantas copias de α al final como desee, obteniendo así cadenas de formación para α de longitud arbitrariamente grande (siempre finita). Formalmente, supongamos que son finitas, y sea $X_1, \ldots, X_n$ la cadena de formación más larga para una fórmula α. Entonces, $X_1, \ldots, X_n, X_n$ también es una cadena de formación para α, contradiciendo nuestra hipótesis de finitud.

Ejercicio 3 Inducción en la complejidad de α. Si α es una variable proposicional, entonces $s(\alpha) = \{\alpha\}$. Si $\alpha = \neg P$, para alguna fórmula P, entonces $s(\alpha) = \{\alpha\} \cup s(P)$. Si $\alpha = (P \star Q)$, entonces $s(\alpha) = \{\alpha\} \cup s(P) \cup s(Q)$. Ojo: $s(\alpha)$ es el **conjunto** de subfórmulas, y por ende no tiene en cuenta posibles repeticiones.

Ejercicio 4 Los conjuntos de subfórmulas son fáciles de calcular. Sólo hay que usar la definición del ejercicio anterior. Por ejemplo, para el caso 1, $s(\alpha) = \{\alpha, (p_1 \vee (p_2 \to p_3)), p_4, p_1, (p_2 \to p_3), p_2, p_3\}$. Una cadena de formación es minimal si no se le puede sacar ningún eslabón. Esto es, si se saca alguno, deja de ser cadena de formación para la fórmula. En símbolos, decimos que una cadena de formación $X_1, \ldots, X_n$ para X_n es minimal si $X_1, \ldots, \widetilde{X_j}, \ldots, X_n$ (la misma sin algún eslabón X_j) no es una cadena de formación para X_n. Intuitivamente (se formaliza en los ejercicios 6 y 7), las cadenas de formación minimales van a ser aquellas que sólo contengan subfórmulas y no tengan repeticiones. Por eso, son permutaciones del conjunto mostrado, respetando las dependencias entre las subfórmulas.

Ejercicio 5 Dado n, la fórmula $\neg \cdots \neg p_1$, que tiene $n-1$ símbolos $\neg$, tiene exactamente n subfórmulas. Veámoslo por inducción en la longitud de la fórmula. Sea $long(\alpha) = 1$, entonces $\alpha = p_1$. Supongamos que para $n-1$ tenemos una fórmula α tal que $\#s(\alpha) = n-1$. Entonces, $\#s(\neg\alpha) = n+1$. En realidad, esta última afirmación hace uso implícito de que todas las subfórmulas de una fórmula tienen a lo sumo su longitud. Así, al agregar una negación (alargando la fórmula), nos aseguramos de no estar repitiendo nada.

Ejercicio 6 Sean α y una cadena de formación para ella. Hacemos inducción en la longitud de α. Si la longitud de α es 1, entonces α es una variable proposicional. En ese caso, su única subfórmula es ella misma, que tiene que aparecer al final de toda cadena de formación para α.

Si $long(\alpha) = n > 1$, $\alpha = \neg P$ o $\alpha = P \star Q$, con P y Q fórmulas. Si $\alpha = \neg P$, entonces sus subfórmulas son α (que aparece en toda cadena) y las subfórmulas de P. Pero P tiene que aparecer en algún lugar de la cadena, y si miramos una cadena hasta un determinado eslabón, tenemos una cadena de formación para la fórmula que aparece en ese eslabón. Entonces, por HI, todas las subfórmulas de P están en la cadena, luego están todas las de α.

Si $\alpha = (P \star Q)$, como empieza con un paréntesis, tiene que haber surgido de juntar dos eslabones previos con un operador binario. Por unicidad de lectura y un argumento similar al del punto anterior, todas las subfórmulas de P y de Q están en la cadena. Luego, están todas las de α.

Ejercicio 7 Si α es una variable, su única cadena de formación minimal es la que sólo la contiene a ella misma. Todo lo que aparezca antes se puede sacar. Supongamos que α no es una variable. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una cadena de formación minimal para α. Supongamos que hay un eslabón C que no es subfórmula de α. Consideremos el conjunto $I = \{i : 1 \leq i \leq n \wedge X_i \notin s(\alpha)\}$ (los índices de todos los eslabones que <u>no</u> son subfórmula). Como $I \subset \mathbb{N}$, y está acotado, tiene un máximo. Sea $i_0 = \max(I)$. Miremos la cadena $X_1, \ldots, \widetilde{X_{i_0}}, \ldots, X_n$. Si esta es una cadena de formación, lo es para X_n y eso contradice la hipótesis de minimalidad. Si no es una cadena de formación, sacer X_{i_0} la rompió. Eso quiere decir que había un eslabón $X_j = \neg X_{i_0}$ o $X_j = (X_{i_0} \star X_k)$ o $X_j = (X_k \star X_{i_0})$, con $j > i_0$

y $k < j$. Pero en cualquiera de esos casos, $X_{i_0} \in s(X_j)$ y por ende (por la construcción de I), $X_{i_0} \in s(X_n)$. Pero eso es un absurdo, que provino de suponer que $I \neq \emptyset$.

Ejercicio 8

1. Inducción en la complejidad de α. Si α es una variable, sale trivialmente. Si $\alpha = \neg P$, $\#VarR(\alpha) = \#VarR(P) = cb(P) + 1 = cb(\alpha)$ por HI. Si $\alpha = (P \star Q)$, $\#VarR(\alpha) = \#VarR(P) + \#VarR(Q) = cb(P) + 1 + cb(Q) + 1 = cb(P) + cb(Q) + 1 + 1 = cb(\alpha) + 1$.

2. Es trivial a partir del inciso anterior, pues $\#Var(\alpha) \leq \#VarR(\alpha)$.

3. Inducción en la complejidad de α. Si α es una variable, $1 = \#s(\alpha) \leq 1 = c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$. Si $\alpha = \neg P$, $\#s(\alpha) = 1 + \#s(P) \leq c(P) + \#VarR(P) + 1 = c(P) + 1 + \#VarR(P) = c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$. Si $\alpha = (P \star Q)$, $\#s(\alpha) \leq 1 + \#s(P) + \#s(Q) \leq c(P) + \#VarR(P) + c(Q) + \#VarR(Q) + 1 = \#c(P) + \#c(Q) + 1 + \#VarR(P) + \#VarR(Q) \leq \#c(\alpha) + \#VarR(Q) + \#VarR(P) = \#c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$.

Ejercicio 9 Dadas las fórmulas $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, y la fórmula α, tal que $Var(\alpha) \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$, defino $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$ inductivamente como sigue: $p_i(\beta_1, \dots, \beta_n) = \beta_i$. Si $\alpha = \neg P$, $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n) = \neg P(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Si $\alpha = (P \star Q)$, $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n) = (P(\beta_1, \dots, \beta_n) \star Q(\beta_1, \dots, \beta_n))$.

Ejercicio 10

1. La reflexividad es trivial, basta sustituir en α sus mismas variables proposicionales.

   Hacemos la simetría por inducción en la complejidad de α. Si $\alpha = p_i$, y $\alpha \sim \beta$, es porque $\beta = \beta_i$. Entonces, $\beta(p_1, \dots, p_n) = p_i = \alpha$. Si $\alpha = \neg P$, por unicidad de lectura $\beta = \neg Q = \neg P(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Entonces, $P \sim Q$ y por HI, $Q \sim P$. Entonces, $\neg P = \neg Q(p_1, \dots, p_n) = \beta(p_1, \dots, p_n)$. Supongamos que $\alpha = (P \star Q)$. $\beta = (P(\beta_1, \dots, \beta_n) \star Q(\beta_1, \dots, \beta_n)) = (R \star S)$ (por unicidad). Entonces, tenemos que $R \sim P$ y $S \sim Q$ (por HI). Entonces, $\alpha = (P \star Q) = (R(p_1 \dots, p_n) \star S(p_1 \dots, p_n) = \beta(p_1 \dots, p_n)$.

   Para la transitividad, supongamos que $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$ (las variables son p_i, β_i y γ_i). Digo que $\alpha \sim \gamma$, pues $\alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \gamma$. Para verlo, vamos de nuevo con inducción en la complejidad de α. Si α es una variable, $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \beta_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \gamma_i = \alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Si $\alpha = \neg P$, $\beta = \neg Q$ y $\gamma = \neg R$, y por HI $P \sim R$. Entonces, $(\neg P)(\beta_1, \dots, \beta_n)(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \neg R = \gamma$.

   Si $\alpha = (P \star Q)$, por argumentos similares, $\beta = (R \star S)$ y $\gamma = (T \star U)$, todo es equivalente con todo, y $\gamma = \alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

2. Hacemos inducción en la complejidad de α. Con las consideraciones del ejercicio anterior, tenemos que si $\alpha = p_i$, entonces γ también es una variable y las tres magnitudes son cero en los dos casos.

   Si $\alpha = \neg P$, $\gamma = \neg Q$, con $P \sim Q$. Luego, por HI, las tres magnitudes coinciden en P y Q. A manopla se ve que también el α y γ.

   Por último, si $\alpha = (P \star Q)$, entonces $\gamma = (R \star S)$, con $R \sim P$ y $S \sim Q$. Luego, por HI, las magnitudes coinciden en P y R, y en Q y S. Nuevamente, a mano se ve que entonces coinciden en α y γ.

Ejercicio 11

1. Si $\alpha = p_i$, $\alpha_\neg = p_i$; si $\alpha = \neg P$, $\alpha_\neg = P_\neg$; si $\alpha = (P \star Q)$, $\alpha_\neg = (P_\neg \star Q_\neg)$.

2. Analizo el conjunto de fórmulas $\alpha \in$ *Form* que cumplen $\alpha_\neg \in$ *Form*. Las variables proposicionales están en el conjunto. Si α es una fórmula que está en el conjunto, entonces $\neg\alpha$ también, pues es $\alpha_\neg$, que está en el conjunto. Si P y Q están, entonces $(P \star Q)_\neg$ también, pues es $(P_\neg \star Q_\neg)$, que están en el conjunto. Entonces, todas las fórmulas cumplen lo pedido.