Lógica y Computabilidad
1^{er} cuatrimestre de 2005
Práctica 4

Enrique A. Tobis

Las explicaciones que siguen son en mayor o menor grado de desarrollo, las ideas que tuve para resolver los ejercicios de las prácticas de Lógica y Computabilidad cuando fui ayudante en la materia. Además de mis ideas, incorporan cambios y correcciones que me fueron sugiriendo los estudiantes. SE PRESENTAN SIN NINGÚN TIPO DE AVAL DE LA FCEN, ni garantía de correctitud. Por supuesto, puse mi mejor fe en hacerlas, pero no me puedo hacer responsable por errores o omisiones que el lector encuentre en ellas.

Desde ya, toda corrección, sugerencia o comentario que desee hacerme llegar será bienvenido. Me puede contactar escribiendo a **etobis@dc.uba.ar**.

Ejercicio 1 Como $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible, por compacidad existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ finito e insatisfacible. Este conjunto tiene que tener por lo menos una fórmula de Γ_1 y una de Γ_2. Si no, sería satisfacible. Si llamamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a las fórmulas de $\Gamma_1 \cap \Gamma_0$ y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ a las de $\Gamma_1 \cap \Gamma_0$, podemos hacer $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ y $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m$. Es claro que $\alpha \in C(\Gamma_1)$ y que $\beta \in C(\Gamma_2)$. Además, $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción. Pero $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$, de lo cual podemos concluir que $(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ es una tautología.

Ejercicio 2 Supongamos que la unión fuera insatisfacible. Entonces, debería existir un subconjunto finito Γ insatisfacible. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las fórmulas de Γ, entonces podemos considerar el conjunto $I = \{\text{mín}_j\{\alpha_i \in \Gamma_j\}, \alpha_i \in \Gamma\}$ (los índices de los primeros conjuntos en los que aparece cada fórmula). Si tomamos $i_o = \text{máx}\, I$, tenemos que todas las fórmulas pertenecen a Γ_i (por la inclusión). Entonces Γ on podía ser insatisfacible. Luego, por compacidad, la unión es satisfacible.

Ejercicio 3

1. Sea $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito. Veamos por inducción en su cantidad de elementos que es satisfacible. Si $\#\Gamma' = 1$, sabemos que es satisfacible pues consta de una sola contingencia. Supongamos que todo Γ' de menos de n elementos es satisfacible. Sea Γ' con n elementos. Entonces, $\Gamma' = \{\alpha\} \cup \Gamma''$ (con $\alpha \notin \Gamma''$. Sea v una valuación que satisface a Γ'' (existe por HI). Sea w una valuación que satisface a α. Construimos v' como sigue. En las variables de α, da lo mismo que w. En las demás variables, da lo mismo que v. Esta valuación satisface a Γ'. Entonces, como todo subconjunto finito es satisfacible, Γ es satisfacible (por compacidad).

2. Si no queremos usar compacidad, vemos directamente que Γ es satisfacible. Para cada elemento α_i hay una valuación v_i. Construimos la valuación v que es igual a cada v_i en las variables de α_i, y 0 en las variables que no aparezcan en Γ. Está bien definida por las intersecciones vacías. v satisface a Γ.

Ejercicio 4 Veamos que si $\beta \in C(\Gamma)$, entonces $\beta \in C(\{\alpha_1\})$. Sea $\alpha \in \Gamma$. Por inducción i veremos que α_i es consecuencia de p_1. Si $i = 1$, entonces es p_1 y está todo bien. Supongamos que vale para todo $i < n$. $\alpha_n = (\alpha_{n-1} \vee p_{i+1})$. Sea v una valuación que satisface a p_1. Por HI satisface a α_{n-1}, y por ende a α_n. Sea $\beta \in C(\Gamma)$. Entonces, existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito, tal que $\beta \in C(\Gamma_0)$. Por la prueba anterior, $\{p_1\} \models \Gamma_0$. Entonces $\beta \in C(\{p_1\})$.

Ejercicio 5

Ejercicio 6 Recordemos que $\{P\} \models Q$ sii $(P \rightarrow Q)$ es una tautología. Y esto también es equivalente a que $[P] \leq [Q]$. Con esto en mente, supongamos que $\Gamma \models \gamma$. Entonces, por compacidad, existe un subconjunto finito $\Gamma_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de Γ tal que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \gamma$. Miremos el cociente finito $\Gamma_0/\equiv$. La hipótesis de que $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología o $\beta \rightarrow \alpha$ es tautología se puede traducir en que este cociente se puede ordenar totalmente. Sea $[\alpha]$ su primer elemento. Es claro que todos los elementos de $[\alpha]$ son consecuencia de α. Los elementos de clases mayores también, pues se tiene que $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología para toda β que esté en una clase $[P]$ tal que $[\alpha] \leq [P]$. Entonces, todo Γ_0 es consecuencia de α. Luego, $\{\alpha\} \models \gamma$.

Ejercicio 7 Supongamos que ninguna fórmula de la forma $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ sea tautología. Esto es lo mismo que decir que ninguna fórmula de la forma $\neg\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \neg\alpha_n$ no es contradicción. Pero esto último es lo mismo que decir que todo subconjunto finito de negaciones de fórmulas de Γ es satisfacible. Entonces $\neg\Gamma = \{\neg\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ es satisfacible. Entonces, existe v valuación tal que $v(\neg\alpha) = 1$ para todo α en Γ. Esto contradice la hipótesis de que v satisface al menos una fórmula de Γ. Entonces, tienen que existir finitas fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que su disyunción es una tautología.

Ejercicio 8 Probaremos por inducción que cada Γ_i es satisfacible. Si $i = 0$, sabemos que es satisfacible por la construcción. Supongamos que todos los Γ_i con $i < n$ son satisfacibles. Miramos Γ_n. Sea v una valuación que satisface a Γ_{n-1}. Sea $p \in (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{Var}(\gamma)) \backslash \mathbf{Var}(\beta)$. Entonces p o $\neg p$ aparece como literal en β. Si aparece p, construimos v', que asigna los mismos valores que v a todas las variables, y 1 a p. Si aparece $\neg p$, en lugar de 1 le asigna 0. Así, un literal que contiene a p será satisfecho por v', y por ende también lo será β. Γ_{n-1} también es satisfecho por v'. Entonces, por el ejercicio 2, Γ es satisfacible.

Ejercicio 9 Sabemos que tenemos que empezar por una fórmula que no sea contradicción. Por ejemplo, p_1. Si vamos agregando las negaciones de las demás variables proposicionales, tenemos un conjunto que sirve. Otro ejemplo, hacemos $\alpha = p_1 \wedge \neg p2$. Vamos agregando $p_{2i} \vee \neg p_{2i+1}$.

Ejercicio 10

1. Si $\Gamma_1 = \emptyset$, la afirmación es trivialmente verdadera. Si no, usamos la sugerencia. Sea v una valuación. Si v satisface a Γ_1, entonces existe $\beta_0 \in \Gamma_2$ tal que v la satisface. Entonces, v satisface a $\alpha \to \beta_0$ para cualquier $\alpha \in \Gamma_1$. Supongamos que v no satisface a Γ_1. Entonces, existe una fórmula $\alpha_0 \in \Gamma_1$ tal que v no la satisface. Entonces v satisface a $\alpha_0 \to \beta$ para cualquier $\beta \in \Gamma_2$. De lo anterior, concluimos que toda valuación satisface al menos una fórmula del conjuto $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.

   Entonces, existen finitas fórmulas en $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ tales que su disyunción es una tautología. Tomamos $T \equiv (\alpha_1 \to \beta_1) \vee \cdots \vee (\alpha_n \to \beta_n) \equiv (\neg\alpha_1 \vee \beta_1) \vee \cdots \vee (\neg\alpha_n \vee \beta_1) \equiv (\neg\alpha_1 \vee \cdots \vee \neg\alpha_n) \vee (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n) \equiv \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \vee (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n) \equiv (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n)$. Si tomamos $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, lo que vimos muestra que $S \models_D \Gamma_2$.

2. Esta afirmación es falsa. Si tomamos $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathbf{Var}$ (el conjunto de todas las variables), ningún subconjunto finito de Γ_1 va a cumplir lo pedido.