Lógica y Computabilidad
1^{er} cuatrimestre de 2005
Práctica 5

Enrique A. Tobis

Las explicaciones que siguen son en mayor o menor grado de desarrollo, las ideas que tuve para resolver los ejercicios de las prácticas de Lógica y Computabilidad cuando fui ayudante en la materia. Además de mis ideas, incorporan cambios y correcciones que me fueron sugiriendo los estudiantes. SE PRESENTAN SIN NINGÚN TIPO DE AVAL DE LA FCEN, ni garantía de correctitud. Por supuesto, puse mi mejor fe en hacerlas, pero no me puedo hacer responsable por errores u omisiones que el lector encuentre en ellas.

Desde ya, toda corrección, sugerencia o comentario que desee hacerme llegar será bienvenido. Me puede contactar escribiendo a **etobis@dc.uba.ar**.

Ejercicio 1

1. Es un término. $c, x, f(c, x)$.

2. No es un término, pues f es binaria.

3. No es un término, pues aparece un cuantificador.

4. Es un término. $c, x, y, f(y, c), f(x, y), f(f(x, y), f(y, c))$.

Ejercicio 2 a, b y e son fórmulas. Las otras dos no.

Ejercicio 3 Se indican en negrita

1. $\forall x \exists y P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

2. $(\forall x P(f(\mathbf{x}, \mathbf{x}), y) \to \forall y \forall x P(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$

3. $(\exists x \exists y \exists z((P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \to P(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \wedge \forall w P(\mathbf{w}, z))$.

Ejercicio 4

1. Los racionales son densos en los reales. Esto es, entre dos reales distintos, siempre hay un racional distinto a ambos. Distinto se deduce de menor.

2. *a*) La coprimalidad es transitiva
   b) Dos números pares no son nunca coprimos.
   c) Si un número no es par, existe otro entero que es coprimo con él.
   d) Dados dos números, uno de ellos par, existe un tercero que no es coprimo con el par, y sí lo es con el otro.

Ejercicio 5

1. $\exists x \forall y (x = y)$.

2. $\exists x \exists y (x \neq y)$.

3. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (x = z \vee y = z))$.

4. $\neg(\exists x (x = x)) \vee \exists x \forall y (x = y) \vee \exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (x = z \vee y = z))$.

Ejercicio 6 φ va a ser el enunciado "El único número que al cuadrado da 1 es el 1". ψ va a ser "Si dos números multiplicados dan 1, son iguales". $\varphi = \forall x (x \cdot x = 1 \to x = 1)$ y $\psi = \forall x \forall y (x \cdot y = 1 \to x = y)$.

Ejercicio 7 Si hacemos $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{C}, \cdot^2)$ y $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot^2)$, tenemos lo pedido.

Ejercicio 8

1. $\forall x \forall y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \to \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge \neg R(z, x) \wedge \neg R(y, z)))$. Agregamos los $\neg R$ para sustituir la falta de igualdad.

2. $\exists x (\forall y R(x, y) \wedge \exists y \exists z (R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge (\forall w (R(w, y) \to R(w, x))) \wedge (R(x, z) \wedge \neg R(z, x) \wedge (\forall w (R(w, z) \to R(w, x)))) \wedge (R(z, y) \to \neg R(y, z)) \wedge (R(y, z) \to \neg R(z, y))) \wedge \forall v (R(x, v) \wedge \neg R(v, x) \wedge (\forall w (R(w, v) \to R(w, x))) \to ((R(z, v) \wedge R(v, z)) \vee (R(y, v) \wedge R(v, y))))))$. Es decir, hay un primer elemento, hay dos átomos, son distintos y son los únicos

Ejercicio 9

1. $\varphi = \forall x \exists y \exists z (z \neq y \wedge x + z + y = x)$. Hay dos elementos distintos que sumados dan el neutro de la suma.

2. $\psi = \forall x \exists y(x = y \cdot y)$. Todo número es un cuadrado.

Ejercicio 10 Recordemos que un elemento de una interpretación es distinguible si existe un predicado unario que se verifica sólo para ese elemento. En el caso de $(\mathbb{N}, \cdot)$, el uno es el único elemento que verifica $\forall y(y \cdot x = y)$. Esto es, es el neutro de la función. En el caso de $(\mathbb{N}, +)$, el uno es el único elemento que verifica que si dos números sumados dan 1, uno es cero y el otro no: $\forall y \forall z(y+z = x \rightarrow (\forall w(w+y = w) \wedge \exists w(w+z \neq w)) \vee (\forall w(w+z = w) \wedge \exists w(w+y \neq w)))$.

Ejercicio 11 El único predicado binario será notado con $\leq$.

1. Los siguientes seis predicados se verifican en un sólo elemento del diagrama, y cada elemento verifica uno sólo de ellos.
   - El mínimo: $\forall y(x \leq y)$.
   - El que está a la derecha del mínimo: $\exists y \forall z(z \leq x \rightarrow y = z) \wedge \exists z \exists y(z \neq y \wedge z \neq x \wedge y \neq z \wedge \forall w(x \leq w \rightarrow (w = y \vee w = z \vee w = x)))$ (i.e. tiene por lo menos uno abajo, y exactamente dos arriba)
   - El que está a la izquierda del mínimo: $\exists y \forall z(z \leq x \rightarrow z = y) \wedge \exists y \exists z \exists w(x \leq w \wedge x \leq z \wedge x \leq y \wedge z \neq y \wedge z \neq w \wedge z \neq x \wedge y \neq w \wedge y \neq x \wedge w \neq x \wedge \forall v(x \leq v \rightarrow (v = w \vee v = y \vee v = z)))$. Hay uno abajo, y exactamente tres arriba.
   - El que está a la izquierda del máximo: $\exists y \forall z(x \leq z \rightarrow y = z) \wedge \exists z \exists y(z \neq y \wedge z \neq x \wedge y \neq z \wedge \forall w(w \leq x \rightarrow (w = y \vee w = z \vee w = x)))$.
   - El que está a la derecha del máximo: $\exists y \forall z(x \leq z \rightarrow z = y) \wedge \exists y \exists z \exists w(w \leq x \wedge z \leq x \wedge y \leq x \wedge y \neq z \wedge w \neq z \wedge z \neq x \wedge y \neq w \wedge y \neq x \wedge w \neq x \wedge \forall v(v \leq x \rightarrow (v = w \vee v = y \vee v = z)))$.
   - El máximo: $\forall y(y \leq x)$.
2. Los siguientes cinco predicados se verifican en un sólo elemento del diagrama, y cada elemento verifica uno sólo de ellos.
   - El mínimo: $\forall y(x \leq y)$.
   - El que está arriba del mínimo. $\exists y(y \neq x \wedge y \leq x \wedge \forall z(z \leq x \rightarrow z = y)) \wedge \exists y \exists z(z \neq y \wedge z \neq x \wedge y \neq x \wedge x \leq z \wedge x \leq y)$ tiene exactamente uno abajo y dos arriba.
   - El que sobresale. $\exists y \exists z(y \neq x \wedge z \neq y \wedge z \neq x \wedge y \leq x \wedge z \leq x \wedge \forall w(w \leq x \rightarrow (w = y \vee w = z \vee w = x)) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge x \leq y))$. Tiene exactamente dos abajo y ninguno arriba.
   - El de abajo del "máximo". $\exists y(y \neq x \wedge x \leq y \wedge \forall z(x \leq z \rightarrow (z = y \vee x = z)))$. Tiene exactamente uno arriba.
   - El "máximo". Tomo la conjunción de las negaciones de todos los predicados anteriores. Hay un sólo elemento que la cumple, y es éste.

Ejercicio 12

Nota: No todos los elementos de todas las interpretaciones son distinguibles. Por ejemplo, si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden que no tiene constantes, símbolos de función ni predicados, la interpretación $\mathbb{Z}$ no tiene elementos distinguibles. Lo mismo ocurre si le agregamos un símbolo de función unario, y lo interpretamos como la función sucesor. Y también si agregamos a esto último un predicado binario que mandamos en la relación $\leq$.