Lógica y Computabilidad
1^{er} cuatrimestre de 2005
Práctica 2

Enrique A. Tobis

Las explicaciones que siguen son en mayor o menor grado de desarrollo, las ideas que tuve para resolver los ejercicios de las prácticas de Lógica y Computabilidad cuando fui ayudante en la materia. Además de mis ideas, incorporan cambios y correcciones que me fueron sugiriendo los estudiantes. SE PRESENTAN SIN NINGÚN TIPO DE AVAL DE LA FCEN, ni garantía de correctitud. Por supuesto, puse mi mejor fe en hacerlas, pero no me puedo hacer responsable por errores o omisiones que el lector encuentre en ellas.

Desde ya, toda corrección, sugerencia o comentario que desee hacerme llegar será bienvenido. Me puede contactar escribiendo a **etobis@dc.uba.ar**.

Agradezco a Sergio Mera por su ayuda en la confección de estas resoluciones.

Ejercicio 1 En los casos a, b y d, hay que hacer las tables de verdad y ver qué pasa. También se puede tratar de ver la fórmula a manopla. En el caso c hay que hacer una "tabla de verdad". Esto es, dada una valuación v, podemos tener $v(\alpha) = 1$ o $v(\alpha) = 0$, y lo mismo pasa con $v(\beta)$. Esto no es una tabla de verdad en el sentido clásico, porque no estamos viendo qué pasa con variables, sino con fórmulas, pero la idea es la misma. En el punto e, sabemos que existen v y w valuaciones tales que $v(\alpha) = 1$ y $w(\alpha) = 0$. Entonces, las mismas cumplen $v(\neg\alpha) = 0$ y $w(\neg\alpha) = 1$. Entonces, $\neg\alpha$ es una contingencia.

Ejercicio 2 Usando el método del teorema del apunte, para la primera nos sirve $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Para la segunda, nos sirve $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Ejercicio 3

1. Sea v tal que $v(((p_1 \to p_2) \vee p_1)) = 1$. Entonces, $v(p_1) = 1$ o $v((p_1 \to p_2)) = 1$. En el segundo caso, lo único que no nos sirve es $v(p_1) = 1$ y $v(p_2) = 0$. Si $v(p_1) = 1$, la fórmula es verdadera por la segunda parte. Si es 0, es verdadera por la primera. Entonces, es una tautología y toda valuación la satisface.

2. $v(((p_1 \to p_2) \to p_2)) = 0$ sii $v((p_1 \to p_2)) = 1$ y $v(p_2) = 0$. Entonces, $v(p_1) = 1$ y $v(p_2) = 0$. Así, toda valuación w que satisfaga $w(p_1) = 0$ o $w(p_2) = 1$ satisface la fórmula, y esas son todas.

3. $v(((p_1 \to p_3) \to \neg p_3)) = 1$ sii $v((p_1 \to p_3)) = 0$ o $v(\neg p_3) = 0$, sii $(v(p_1) = 0$ o $v(p_3) = 1)$ o $v(p_3) = 1$. Entonces, las valuaciones que satisfacen la fórmula son aquellas que cumplen $v(p_1) = 0$ o $v(p_3) = 1$.

Ejercicio 4 Supongamos que existe $v(\alpha) = 1$. Supongamos que $\mathbf{Var}(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Dado $i \in \mathbb{N}$. Construimos $f_i : \{p_1, \ldots, p_{n+i}\} \to \mathbf{B}$, caracterizada por $f_i(p_1) = v(p_1), \ldots, f_i(p_n) = v(p_n), f_i(p_{n+1}) = v(p_{n+1}), \ldots, f_i(p_{n+i-1}) = v(p_{n+i-1}), f_i(p_{n+i}) = 1 - v(p_{n+i})$. Consideramos las extensiones (únicas) v_i que corresponden a cada f_i. Estas extensiones tienen que ser todas distintas, por cómo construimos las f, y como son infinitas, prueban lo que nos pidieron.

Ejercicio 5 $p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_3)$ cumple lo pedido.

Ejercicio 6 Lo podemos resolver haciendo inducción en la complejidad de α. Si $\alpha = p_i$, entonces por la hipótesis, $v(\alpha) = w(\alpha)$. Si $\alpha = \neg P$, por HI, $v(P) = w(P)$, entonces $v(\neg P) = w(\neg P)$. Si $\alpha = (P \star Q)$, entonces por HI $v(P) = w(P)$ y $v(Q) = w(Q)$. De eso concluimos que $v(\alpha) = w(\alpha)$. Generalizar a toda $\alpha \in \mathbf{Form}$ es fácil. Dada una fórmula α, existe un n tal que $Var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$, pues las fórmulas son listas finitas.

Ejercicio 7

1. V. Sea v una valuación. $v(\alpha \wedge \beta) = \text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = \text{mín}(1, 1) = 1$.

2. F. $(p \to p)$ es una tautología, pero sus dos "términos" son ambos contingencias.

3. F. p es una contingencia, y $\neg p$ es una contigencia. Sin embargo, $(p \vee q)$ es una tautología. La otra implicación sí vale. Si ambas fueran tautología o contradicción, la fórmula tendría un único valor de verdad para cualquier valuación, por lo que no podría ser contigencia.

4. F. p es una contigencia, pero $(p \to p)$ es una tautología.

5. F. $(p \to p)$ es una tautología, pero p es una contingencia.

6. V. Sea v una valuación. $v((\alpha \to \beta)) = \text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta)) = 0$. Esto pasa sii $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 0$. Como esto se tiene que cumplir para toda valuación, α es una tautología y β una contradicción.

Ejercicio 8 Si α es contradicción o β es tautología, $\text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta)) = 1$ para toda valuación v, sin importar qué pasa con las variables. Si permitimos que tengan variables en común, el inciso v del ejercicio anterior nos muestra que la otra implicación es falsa. Supongamos, entonces, que $(\alpha \to \beta)$ es una tautología, y que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$. Supongamos que $\exists v$ valuación tal que $v(\alpha) = 1$ y que $\exists w$ valuación tal que $w(\beta) = 0$. Defino $f : \mathbf{Var} \to \mathbf{B}$ como sigue. Si $p_i \in \mathbf{Var}(\alpha)$, $f(p_i) = v(p_i)$. Si $p_i \in \mathbf{Var}(\beta)$, $f(p_i) = w(p_i)$. Si p_i no está en ninguno de los dos conjuntos de variables, $f(p_i) = 0$. Esta función está bien definida, porque asigna uno y sólo un valor a cada variable. Aquí usamos la intersección vacía. Sea v_f la valuación que extiende a f. Entonces, $v_f((\alpha \to \beta)) = 0$, lo cual es un absurdo. Entonces, α es contradicción o β es tautología.

Ejercicio 9

1. Supongamos que α sea una contradicción. Sea v valuación tal que $v((\alpha \wedge \beta)) = 1$. Entonces, $\text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = \text{mín}(0, v(\beta)) = 0$. Entonces α no puede ser una contradicción. Supongamos que α sea una tautología. Sea v una valuación. Entonces $\text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = \text{mín}(0, v(\beta)) = v(\beta)$. Como $(\alpha \wedge \beta)$ es una contigencia, hay una valuación para la cual $v(\beta) = 1$ y hay alguna para la cual $v(\beta) = 0$. Entonces, β es una contingencia.

2. Con un procedimiento similar al del ejercicio 8, creamos una valuación que da 1 y otra que da 0. Con eso probamos que la fórmula es una contingencia.

Ejercicio 10 Usamos $\alpha = (p_1 \vee \neg p_1) \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$. Construimos las 2^n funciones que asignan a $p_1, \ldots, p_n$ todos los posibles valores, y al resto de las variables les asignan 0. Consideramos las valuaciones que extienden estas funciones. Son 2^n, y si nos dan una valuación que cumple con las condiciones pedidas, entonces es una de estas.

Para k entre 1 y 2^n, una tabla de verdad que tenga todas las posibles asignaciones de valores a las variables, y le ponemos 1 a la última columna de las k primeras filas. Construimos una fórmula que tenga esa tabla de verdad, y procedemos como en el punto anterior.

Para formalizar la construcción de las tablas anteriores, sean l, i naturales ($i \geq 1$), notamos $|l|_i$ al i-ésimo dígito en la expresión binaria de l (1 indica el dígito menos significativo). Para nuestro primer problema, para $1 \leq j \leq 2^n$, definimos $f_j : \mathbf{Var} \to \mathbf{B}, f_j(p_i) = |j|_i$ para todas las variables p_i. Construimos las 2^n valuaciones v_{f_j} y tenemos lo pedido.

Para el segundo punto, armamos la función booleana de n variables f, dada por $0 \leq j \leq k-1$, $f(|j|_n, \ldots, |j|_1) = 1$; $k \leq j \leq 2^n - 1$, $f(|j|_n, \ldots, |j|1) = 0$. Sea P una fórmula que tiene esta función como tabla de verdad. De las 2^n valuaciones que dan 0 en el resto de las variables, y algo en las primeras n, sólo k harán verdadera a estar fórmula. A saber, las k que cumplen $\sum_{l=1}^{n} v(p_l) < k$.

Ejercicio 11 Mirando un poco, se ve que para toda valuación v, y para toda variable p_i que aparece en α, $v(\alpha) = 1 \wedge v(p_i) = 0$, o bien $v(\alpha) = 0 \wedge v(p_i) = 1$. Entonces, para toda variable p_i, $\alpha \equiv \neg p_i$. Pero entonces sólo puede haber una variable. Si no, variables distintas serían semánticamente equivalentes, lo cual es un absurdo.

Ejercicio 12 Hacemos inducción en la complejidad de α. Si es variable, es trivial. Nuestra HI va a ser que para toda fórmula de complejidad menor a la de α, que tiene a lo sumo una aparición de cada variable, se cumple que la fórmula es una contingencia. Si es $\alpha = \neg P$, por HI P es una contingencia, luego α también lo es. Si $\alpha = (P \wedge Q)$, armamos una valuación v que nos de $v(P) = v(Q) = 1$ y otra w que nos de $w(P) = 1 - w(Q) = 0$. Para construir v y w, observamos que $\mathbf{Var}(P) \cap \mathbf{Var}(Q) = \emptyset$, y usamos el procedimiento del ejercicio 8. v y w nos muestran que α es una contingencia. Un procedimiento análogo se puede aplicar para los conectivos $\vee$ y $\to$.

Ejercicio 13 Supongamos que α es una tautología. Sea w una valuación. Construyo v valuación tal que $v(p_i) = w(\beta_i)$. Esta valuación está bien definida. Haciendo inducción en la complejidad de α, se ve que para toda valuación w, $w(\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)) = v(\alpha)$. Entonces, la fórmula con el reemplazo es también tautología, pues $v(\alpha) = 1$. Para la vuelta, basta tomar $\beta_i = p_i$.

Ejercicio 14 Sea $f_1 : \mathbf{Var} \to \mathbf{B}$ tal que $f_1(p_i) = 1$ para toda variable. Sea v_1 la valuación que extiende a f_1.

1. Supongamos que α sea una fórmula construida usando sólo variables, $\wedge$ y $\to$. Veamos que $v_1(\alpha) = 1$, por inducción en la complejidad de α. Si $\alpha = p_i$, $v_1(\alpha) = v_1(p_i) = 1$. Si $\alpha = (P \wedge Q)$, $v_1(\alpha) = \text{mín}(v_1(P), v_1(Q)) = \text{mín}(1, 1) = 1$ por HI. Si $\alpha = (P \to Q)$, $v_1(\alpha) = \text{máx}(1 - v_1(P), v_1(Q)) = \text{máx}(0, 1) = 1$.

   Entonces, ninguna fórmula construida así puede ser semánticamente equivalente a $\neg p_1$. Entonces, el conjunto no es adecuado.

2. Idem inciso anterior.

3. Idem inciso anterior.

4. El conjunto sí es adecuado. Sea α una fórmula, daremos inductivamente otra semánticamente equivalente $\alpha_{\vee\neg}$, pero que sólo contiene variables, $\vee$ y $\neg$. Si $\alpha = p_1$, esa misma nos sirve. Si $\alpha = \neg P$, $\alpha_{\vee\neg} = \neg P_{\vee\neg}$. Si $\alpha = (P \vee Q)$, $\alpha_{\vee\neg} = (P_{\vee\neg} \vee Q_{\vee\neg})$. Si $\alpha = (P \wedge Q)$, $\alpha_{\vee\neg} = \neg(\neg P_{\vee\neg} \vee \neg Q_{\vee\neg})$. Si $\alpha = (P \to Q)$, $\alpha_{\vee\neg} = (\neg P_{\vee\neg} \vee Q_{\vee\neg})$.

   Resta ver que las fórmulas así construidas son efectivamente semánticamente equivalentes a las originales. Veámoslo por inducción en la complejidad de α. Si es una variable, no cambiamos nada, así que está todo bien. Si $\alpha = \neg P$, $\alpha_{\vee\neg} = \neg P_{\vee\neg} \equiv \neg P = \alpha$ (por HI). Si $\alpha = (P \vee Q)$, $\alpha_{\vee\neg} = (P_{\vee\neg} \vee Q_{\vee\neg}) \equiv (P \vee Q) = \alpha$ (por HI). Si $\alpha = (P \wedge Q)$, $\alpha_{\vee\neg} = \neg(\neg P_{\vee\neg} \vee \neg Q_{\vee\neg}) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv \alpha$ (por HI y de Morgan). Si $\alpha = (P \to Q)$, $\alpha_{\vee\neg} = (\neg P_{\vee\neg} \vee Q_{\vee\neg}) \equiv (\neg P \vee Q) \equiv \alpha$ (por HI y reglas de las valuaciones).

5. No lo es, por un argumento similar al de incisos anteriores. Notar que toda fórmula construida con este conectivo ternario contiene sólo variables, $\vee$ y $\to$. Ya mostramos que esos conectivos no eran suficientes para expresar $\neg p_1$.

Ejercicio 15

1. Para ver que está bien definida, sean $[\alpha] \leq [\beta]$, y sean $\gamma \in [\alpha]$ y $\delta \in [\beta]$. Queremos ver que $(\gamma \to \delta)$ es una tautología. Sea v una valuación. $v((\gamma \to \delta)) = \text{máx}(1 - v(\gamma), v(\delta)) = \text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta)) = v((\alpha \to \beta)) = 1$. Entonces, es una tautología y la relación está bien definida.

2. Tenemos que ver que es

   - **Reflexiva** Ya vimos en algún ejercicio anterior que $(\alpha \to \alpha)$ es una tautología.
   - **Antisimétrica** Tenemos $(\alpha \to \beta)$ y $(\beta \to \alpha)$ ambas tautologías. Sea v una valuación. Sabemos que $\text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta)) = \text{máx}(1 - v(\beta), v(\alpha)) = 1$. Supongamos que $v(\alpha) = 1 \neq v(\beta)$. Entonces, el primer máx da 0. Supongamos que $v(\alpha) = 0 \neq v(\beta)$. Entonces, el segundo máx da 0. Entonces $v(\alpha) = v(\beta)$, y $[\alpha] = [\beta]$.
   - **Transitiva** Tenemos que $(\alpha \to \beta)$ y $(\beta \to \gamma)$ son ambas tautologías. Sea v una valuación. $\text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta)) = \text{máx}(1 - v(\beta), v(\gamma)) = 1$ y $v((\alpha \to \gamma)) = \text{máx}(1 - v(\alpha), v(\gamma))$. Si $v(\alpha) = 1$, $v(\beta) = 1$ por el primer máx, y $v(\gamma) = 1$ por el segundo máx. Entonces, si $v(\alpha) = 1$, $\text{máx}(1 - v(\alpha), v(\gamma)) = 1$, y si $v(\alpha) = 0$, $\text{máx}(1 - v(\alpha), v(\gamma)) = 1$, por lo que $[\alpha] \leq [\gamma]$.

Ejercicio 16 Ante todo, tenemos que probar que las operaciones que nos dan están bien definidas. Esto no presenta mayores dificultades. Es muy similar a lo que hicimos en el ejercicio anterior. Una vez que tenemos bien definidas las operaciones, tenemos que mostrar que

- $\vee^*$ y $\wedge^*$ son asociativas, conmutativas y distributivas respecto de la otra. Estas tres propiedades se heredan de las de los conectivos lógicos, a partir de la definición que aquí se les da.
- $\top \wedge^* [\alpha] = [\alpha] \wedge^* \top = [\alpha]$.
- $\bot \vee^* [\alpha] = [\alpha] \vee^* \bot = [\alpha]$.
- $[\alpha]$, $\neg^*[\alpha] \vee^* [\alpha] = \top$ y $\neg[\alpha] \wedge^* [\alpha] = \bot$.

Todas estas propiedades son más o menos directas a partir de la definición de las operaciones, pasando por los conectivos del CP. El orden natural está dado por $[\alpha] \leq^* [\beta] \Leftrightarrow [\alpha] = [\alpha] \wedge^* [\beta]$. Veamos que coincide con el del ejercicio anterior. Supongamos que $[\alpha] \leq [\beta]$, sii $(\alpha \to \beta)$ es tautología. Sea v una valuación. $\text{máx}(1 - v(\alpha), v(\beta)) = 1$. Eso ocurre sii $v(\alpha) = 0$ o $v(\beta) = 1$. Si $v(\alpha) = 0$, $\text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = 0$, de lo cual $v(\alpha) = v((\alpha \wedge \beta))$. Si $v(\beta) = 1$, $\text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = v(\alpha)$. Entonces, $[\alpha] \leq [\beta]$ sii $\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta)$ sii $[\alpha] = [(\alpha \wedge \beta)] = [\alpha] \wedge^* [\beta]$ sii $[\alpha] \leq^* [\beta]$.

Ejercicio 17 Probar que todo vale es igual que en el ejercicio anterior. Para la finitud, en la teórica se vio un método para "convertir" cualquier fórmula en una que está en forma normal disyuntiva. Eso nos permite afirmar que toda fórmula en las variables $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es semáticamente equivalente a otra en f.n.d. Ahora bien, supongamos que, por ejemplo, la variable p_n no aparezca en una cláusula $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j)$. Si reemplazamos esa cláusula por las dos cláusulas $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge p_n)$ y $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \neg p_n)$, estamos reemplazando una cláusula por dos que, unidas por un $\vee$ son semánticamente equivalentes. Esto nos muestra que podemos reescribir todas las cláusulas que estén incompletas, y obtener fórmulas en f.n.d que son semánticamente equivalentes, pero que tienen solo cláusulas completas. Estas son todas semánticamente distintas entre sí, por sus tablas de verdad (i.e. si alguna cláusula está en una y no en otra, entonces habrá un 1 en la última columna de la que está, y un 0 en la que no está). Además, toda fórmula es equivalente a una de ellas. Como hay n variables, hay 2^n cláusulas (por las negaciones). Como cada cláusula puede o no estar en una fórmula, hay exactamente 2^{2^n} fórmulas en f.n.d. completa, y estas dan lugar cada una a una clase de equivalencia.

Ejercicio 18 Sean $\delta \in [\alpha]$ y $\gamma \in [\beta]$, con $[\alpha] \to^* [\beta]$. Sea v una valuación. Si $v((\alpha \to \beta)) = 1$, sii $v(\alpha) = 0$ o $v(\beta) = 1$ sii $v(\delta) = 0$ o $v(\gamma) = 1$ sii $v((\delta \to \gamma)) = 1$. Entonces $[\delta \to \gamma] = [\alpha \to \beta]$, y la operación está bien definida.

1. $[\alpha] \to^* [\beta] = [\alpha \to \beta] = [\neg\alpha \vee \beta] = \neg^*[\alpha] \vee^* [\beta]$.
2. $\bot \to^* [\alpha] = [((p_1 \wedge \neg p_1) \to \alpha)] = \top$ (pues esta última fórmula es una tautología).
3. $[\alpha] \to^* \bot = [(\alpha \to (p_1 \wedge \neg p_1))] = [\neg\alpha] = \neg^*[\alpha]$.
4. $\top \to^* [\alpha] = [((p_1 \vee \neg p_1) \to \alpha)] = [\alpha]$.
5. $[\alpha] \to^* \top = [(\alpha \to (p_1 \vee \neg p_1))] = \top$.
6. $[\alpha] \to^* [\beta] = [(\alpha \to \beta)] = \top$ sii $(\alpha \to \beta)$ es tautología, sii $[\alpha] \leq [\beta]$.

