ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
1er Recuperatorio / 18-JUL-2012

Espacio reservado para los docentes:

Nota (Numérica)	Nota (Letras)	Docente

Completar los siguientes datos antes de entregar:

Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cantidad de hojas[1]

Fecha de entrega de notas: a determinar.
Por favor entregar esta hoja junto al examen.

1. Sean d_{out} y d_{in} dos vectores, cada uno de ellos formado por n enteros en el intervalo $[0, n-1]$. Además, ambos vectores tienen igual suma. Se desea encontrar un digrafo simple tal que el i-ésimo vértice tenga grado de salida $d_{\text{out}}(i)$ y grado de entrada $d_{\text{in}}(i)$ para $i = 1, 2, \ldots n$. El digrafo buscado no debe tener arcos de un vértice a sí mismo, ni más de un arco con igual dirección entre el mismo par de vértices (aunque sí puede tener dos arcos con direcciones opuestas). ¿Es cierto que siempre existe un digrafo como el descripto? Justificar.

2. Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, un homomorfismo de G_1 a G_2 es una función $f : V_1 \to V_2$ tal que $(v, w) \in E_1 \Rightarrow (f(v), f(w)) \in E_2$. Decimos que G_1 es homomorfo a G_2 si y sólo si existe un homomorfismo de G_1 a G_2.

   Demostrar que el homomorfismo es una relación reflexiva y transitiva, pero no simétrica ni antisimétrica. Es decir, demostrar los siguientes hechos:

   (a) Todo grafo G es homomorfo a sí mismo.
   (b) Para toda terna de grafos F, G y H, si F es homomorfo a G y G es homomorfo a H, entonces F es homomorfo a H.
   (c) Existen grafos G y H tales que G es homomorfo a H pero H no es homomorfo a G.
   (d) Existen grafos G y H no isomorfos tales que G es homomorfo a H, y H es homomorfo a G.

3. Un puente de un grafo es un eje del grafo tal que al removerlo se obtiene un grafo con más componentes conexas. Sea G un grafo conexo y e uno de sus ejes. Demostrar que e es un puente de G si y sólo si e pertenece a todo árbol generador de G.

4. Luego de los cursos en Europa, el Magnate de la Bondiola logró ganar muchísimo dinero con los puestos que tiene en la franja de la Costanera que está al sur de Ciudad Universitaria. Su consejera espiritual le recomendó expandir y diversificar su actividad. Es así que el Magnate compró los n negocios de una cuadra del barrio de Belgrano, con el objetivo de instalar comercios en cada uno de ellos. Cada comercio puede ser de uno de los siguientes 3 tipos: venta y reparación de computadoras (1); venta de lencería (2); puesto de bondiola (3). Se conoce el costo c_{ij} de instalar un comercio tipo i en el j-ésimo negocio de la cuadra ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \ldots n$). El Magnate quiere instalar los n comercios, pero sin que haya dos o más comercios consecutivos del mismo tipo, ya que competirían entre sí. Diseñar un algoritmo eficiente para determinar el costo mínimo para instalar los n comercios teniendo en cuenta la restricción mencionada. Mostrar la correctitud y determinar la complejidad del algoritmo propuesto (temporal y espacial). Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad temporal $O(n)$ y espacial $O(1)$ (adicional a los datos).

5. Dado un grafo G, se define la distancia entre dos de sus vértices como el mínimo, sobre todos los caminos que van del primer al segundo vértice, de la cantidad de ejes que hay en el camino (o infinito si tales caminos no existen). Además, se define $D(G)$ como el máximo, sobre todos los pares de vértices de G, de la distancia entre esos vértices (diámetro).

   Sea G un grafo no dirigido y G^c su complemento. Demostrar que si $D(G) \geq 3$ entonces $D(G^c) \leq 3$. Demostrar que si $D(G) > 3$ entonces $D(G^c) < 3$.

   SUGERENCIA: Si G es conexo, organizar los vértices en $D(G)$ niveles.

[1] incluyendo a esta hoja