



227  
(5)

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)  
EXAMEN FINAL  
(19/03/04)

NOMBRE Y APELLIDO:

Nº DE LIBRETA:

e-mail:

Nº DE HOJAS ENTREGADAS:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1. (25 pts.) Sea  $T \sim \Gamma(2, 2)$  y  $U|_{T=t} \sim \mathcal{U}([0, \frac{2}{t}])$ .

(a) Hallar  $E(U)$ .

(b) Hallar la función de densidad marginal de  $U$ .

(c) Hallar  $f_{T|U=1}(t)$ .

2. (25 pts.) Sean  $U$  e  $Y$  variables aleatorias independientes con  $V(U) = 2$ ,  $V(Y) = 3$ .

(a) Hallar  $cov(2Y - U, U - Y)$ .

(b) Sea  $X = 3U + 2Y$ . Hallar  $\rho(U, X)$ .

(c) Si además  $E(U) = 1$ ,  $E(Y) = 3$ . Hallar  $V(UY)$ .

3. (25 pts.) Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias i.i.d con función de densidad

$$f_X(x, \theta) = \frac{3}{\theta} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{\theta^2} \right) \mathbb{I}_{[-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}]}(x), \quad (\theta > 0).$$

(a) Hallar el estimador de momentos de  $\theta$ .

(b) Definir consistencia de un estimador y probar que el estimador hallado es consistente.

(c) Si  $n = 10$ ,  $\bar{X} = 0.1$ ,  $s^2 = 4.44$ . Calcular  $\hat{\theta}$ .

4. (25 puntos)

- (a) Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de variables aleatorias  $Bi(1, p)$ , siendo  $n$  grande. Halle un test de nivel aproximado  $\alpha$  para testear las hipótesis

$$H_0 : p = 0.30$$

$$H_1 : p < 0.30$$

y pruebe que el test propuesto tiene el nivel aproximado requerido.

- (b) Calcular la probabilidad de no rechazar  $H_0$  cuando en realidad  $p = 0.26$ .
- (c) La proporción de fumadores en cierta ciudad era del 30%. Luego de una campaña publicitaria contra el cigarrillo se desea saber si ha tenido éxito. Se va a realizar un test de nivel aproximado 0.05. ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra si se quiere que la probabilidad de error de tipo II cuando la verdadera proporción de fumadores bajó al 26 % sea  $\leq 0.10$ ?

