NOMBRE Y NRO. LIBRETA:

1	2	3	4	Calif.

ÁLGEBRA LINEAL - PRIMER PARCIAL

1er cuatrimestre 2012 (26/5/2012)

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $f, g : V \to V$ dos endomorfismos tales que $f \circ g = 0$ y $f + g$ es un isomorfismo.

   (a) Probar que $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^2)$.

   (b) Probar que $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. (a) Sea $\mathbb{R}_3[X]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 y sean $k \in \mathbb{N}_0$, $\xi \in \mathbb{R}$ dados.

   (i) Probar que la asignación $P \mapsto P^{(k)}(\xi - 17k + \sin \xi)$ define un elemento de $\mathbb{R}_3[X]^*$. [$P^{(k)}$ denota la derivada k-ésima de P.]

   (ii) Probar que siempre existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que la igualdad:

   $$P^{(k)}(\xi - 17k + \sin \xi) = aP(0) + bP(1) + cP'(0) + d(P(2) - P(1))$$

   se cumple para todo $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

   (b) Hallar todos los $\xi \in \mathbb{R}$ para los que no existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

   $$P^{(2)}(2\xi^2 - 4) = aP(0) + bP(1) + c\int_0^1 P(x)\,dx \quad \forall P \in \mathbb{R}_3[X].$$

3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices: $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 11 \\ 10 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Encontrar una matriz $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathrm{adj}(M) = A$.

   (b) Probar que no existe $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathrm{adj}(N) = B$.

4. Sea $k \in \mathbb{C}$, y sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} k & -2k+4 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Calcular, para cada valor de $k \in \mathbb{C}$, el polinomio minimal de A.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.