Ideas para las demostraciones del final

Por Nicolás Pironio, nicopironio@gmail.com

El siguiente compilado no pretende poseer las demostraciones completas de cada enunciado que aparece en la materia. Su objetivo es resumir las ideas generales de cada una para ayudar a pensar y estudiarlas sin la necesidad de escribir cada paso lógico con su debida notación. Ademas, fué confeccionado por la necesidad personal de quien les escribe y por lo tanto el detalle con el que se explica cada demostración varía. Dicho todo esto creo que este resumen tiene utilidad como ayuda memoria y para asentar las ideas luego de haber escrito y entendido por lo menos una vez cada demostración.
Espero que este pueda resultarle útil a quien este preparando este final tan extenso, suerte!

Contents

1 Espacios Vectoriales

Cantidad de vectores LI es menor o igual a cantidad de elementos generadores

Sea V un K espacio vectorial, $\{v_1 \dots v_r\}$ un conjunto de generadores de V. Si $\{z_1 \dots z_l\}$ l.i en $V \Rightarrow l \leq r$

<u>Dem</u>: Para cada z_i tomamos una combinacion lineal de los v_j:

$$z_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j$$

.
Consideremos el sistema lineal de r ecuaciones y l incognitas:

$$\sum_{h=1}^{l} \alpha_{hj} X_h = 0 \quad \forall j = 1 \dots r$$

Tiene solucion siempre (la trivial). Tomamos $(c_1 \dots c_l)$ solucion del sistema y planteamos la suma:

$$\sum_{h=1}^{l} c_h z_h$$

Vemos que esta suma da 0 y como los z_i son l.i entonces los c_j son todos 0. Entonces $\exists!$ solucion y es la trivial $\Rightarrow$ hay mas ecuaciones que incognitas $\Rightarrow l \leq r$

<u>Coro</u>: *Sean $\beta_1 = \{v_1 \dots v_n\}$ y $\beta_2 = \{w_1 \dots w_m\}$ bases de $V \Rightarrow \ m = n$*
<u>Dem</u>: Usar para ambos lados el Teorema anterior diciendo que un conjunto genera y el otro es li, por la doble desigualdad $n = m$.

Extender conjunto l.i a base de subespacio

Sea V un K espacio vectorial de dimensión finita, $W \subseteq V$ subespacio. Sea $S \subseteq W$ un conjunto l.i $\Rightarrow S$ es finito y se puede extender a base finita de W

<u>Dem</u>:
• Finito: Usar que V es de dimensión finita y que todo conjunto l.i tiene cardinal menor al cardinal de un conjunto generador del espacio.

• Extension: Recursivamente

- Si $< S >= W \ \Rightarrow S$ es base de W
- Sino $< S > \subsetneq W$ y puedo tomar un v l.i con S extendiendo en uno.

La recursion termina pues $dim(V) < \infty$ y el cardinal de cjto l.i es menor a la dimensión de V

Teo. de la dimension para suma de subespacios

Sea V un K espacio vectorial de dimension finita. $S, T \subseteq V$ subespacios
$\Rightarrow dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T)$

Dem: Tomamos base de la interseccion $\{v_1 \dots v_r\}$. Completamos a base de S con s_i's. Completamos a base de T con t_j's. Definimos $\beta = \{v_1 \dots v_r, s_1 \dots s_n, t_1 \dots t_m\}$, basta con ver que β es base de $S+T$ probando que lo genera y que es conjunto l.i.

• Truquito para l.i: escribir la c.l y despejar una de las sumas, decir que la despejada esta en la interseccion y escribirla como c.l de la interseccion, despues ver que los coeficientes son todos 0 por como armaste las bases de S, T y $S \cap T$.

2 Transformaciones Lineales

Teorema de la dimension para transformaciones lineales

Sea $f : V \to W$ lineal, con dimension de V finita $\Rightarrow$ $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Dem: Separamos en casos dependiendo de la dimension del nucleo k

- $k = n$: $dim(Ker(f)) = dim(V) \wedge Ker(f) \subseteq V \Rightarrow Ker(f) = V \Rightarrow f = 0 \Rightarrow Im(f) = \{0\}$
- $k = 0$: f es mono, tomando β base de $V \Rightarrow f(\beta)$ es l.i y genera la imagen (en este caso es todo V).
- $0 < k < n$: Tomamos $\beta_K = \{v_1 \dots v_r\}$ una base de $Ker(f)$ y extendemos a base de V con $\{v_{r+1} \dots v_n\}$ Luego basta con ver que $\{f(v_{r+1}) \dots f(v_n)\}$ es base de $Im(f)$

Proyectores

Nucleo e Imagen estan en suma directa con V

f es proyector $\Rightarrow$ $V = Ker(f) \oplus Im(f)$

Dem:
• $V = Ker(f) + Im(f)$: Sea $v \in V$, escribirlo como $v = (v - f(v)) + f(v)$ y observar que $v - (f(v)) \in Ker(f)$ y $f(v) \in Im(f)$
• $Ker(f) \cap Im(f) = 0$: tomar $v \in Ker(f) \cap Im(f)$ y ver que es 0.

Proyector a partir de subespacios en suma directa

Sea V un K espacio vectorial de dimension finita. $S, T \subseteq V$ subespacios tales que $V = S \oplus T$
$\Rightarrow$ $\exists! f : V \to V$ proyector tal que $Ker(f) = S$ y $Im(f) = T$

Dem:
• Unicidad: notar que todo $v \in V$ tiene escritura unica como suma de S y T: $v = s + t$. Si existe un proyector g que cumple $\Rightarrow$ $g(v) = t$.
• Existencia: la definimos como vimos en la unicidad, hace falta ver que

- f es lineal
- $Ker(f) = S$
- $Im(f) = T$
- f es proyector

3 Rango de matrices

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $rg_c(A) = rg_f(A)$

<u>Obs</u>: $rg_c(A) = rg_f(A^t)$
Para probar esto debemos probar dos lemas previos.

• Lema 1: *Sea* $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $C \in GL(n,\mathbb{K})$ *y* $D \in GL(m,\mathbb{K})$ $\Rightarrow rg_f(A) = rg_f(CAD)$
<u>Dem</u>: Tomar μ_A la t.l "multiplicar por A", observar que $A = |\mu_A|_{EE'}$ y que existen bases β_1 y β_2 tales que $C = C(E', \beta_1)$ y $D = C(\beta_2, E)$. Luego $rg_c(CAD) = rg_c(|\mu_A|_{\beta_1\beta_2}) = dim(ImA) = rg_c(A)$

• Lema 2: *Sea* $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A \neq 0 \Rightarrow \exists\ 1 \leq k \leq min\{n,m\}$ $C \in GL(n,\mathbb{K})$ $D \in GL(m,\mathbb{K})$ *tales que:*

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u>: Tomamos una base del nucleo $\{w_1 \dots w_r\}$ y la extendemos a una base β_1 de $\mathbb{K}^m$ $\quad \{v_1 \dots v_{m-r}, w_1 \dots w_r\}$, luego $\{\mu_A(v_1) \dots \mu_A(v_{m-r})\}$ es base de la imagen de A.
La completamos a base β_2 de $\mathbb{K}^m$ $\{\mu_A(v_1) \dots \mu_A(v_{m-r}), z_1 \dots z_{n-m+r}\}$.
Tomando $C = C(E', \beta_1)$ y $D = C(\beta_2, E)$, CAD queda de la forma esperada y k es exactamente el rango de A.

<u>Dem del teorema</u>: Tomamos A. Si es la matriz nula ya esta, sino aplicamos el lema 2, observamos que es una matriz simetrica.

$$rg_f(A) = rg_c(A^t) = rg_c((CAD)^t) = rg_c(CAD) = rg_c(A)$$

4 Espacio dual

Relacion entre bases de V y V^*

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dim(V) = n < \infty$ y V^* el dual de V. Sea $\bar{\beta} = \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ una base de V^*

$$\Rightarrow \exists! \ \beta \text{ base de V tal que } \bar{\beta} = \beta^*$$

Dem:
•Existencia: Sea $\beta_1 = \{w_1 \dots w_n\}$ una base de V, definimos

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \dots & \varphi_1(w_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \dots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$$

Notar que la fila i es $[\varphi_i]_{\beta_1}$, por lo tanto son l.i $\Rightarrow M$ tiene una inversa que notamos A. Planteamos y llegamos a una expresion de la forma

$$\delta_{ij} = (MA)_{ij} = \varphi_i(v_j)$$

Tomando $\beta = \{v_1 \dots v_n\}$, falta probar que es base de V (ver que son l.i) y que $\bar{\beta} = \beta^*$

•Unicidad: Dadas dos bases que tienen el mismo dual queremos ver que son iguales. Tomamos cada elemento de la primera y la escribimos como la c.l unica de la otra, le aplicamos los elementos del dual a ambos lados de la expresion.

Teorema de la dimension del anulador

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dim(V) = n < \infty$. Sea $S \subseteq V$ subespacio

$$\Rightarrow dim(V) = dim(S) + dim(S^\circ)$$

Dem: Separamos en casos
• $S = \{0\} \Rightarrow S^\circ = V$ y vale

• $S \neq \{0\}$: Sea $dim(S) = r$ tomamos una base de S $\{v_1 \dots v_r\}$ y la completamos a base de V $\{v_1 \dots v_r, v_{r+1} \dots v_n\}$ y tomamos su dual $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$
Extraemos $\{\varphi_{r+1} \dots \varphi_n\}$ y probamos que es base de S°).

- Es l.i pues sale de un conjunto l.i.
- Para ver que genera tomamos $g \in S^\circ$ y la escribimos como c.l de la base de V^* con el truco de escribir sus coordenadas $a_i = g(v_i)$, asi se cancelan los primeros r terminos, mostrando que $g \in <\varphi_{r+1} \dots \varphi_n>$

Los unicos que se anulan en S° son los de S

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dim(V) = n < \infty$. Sea $S \subseteq V$ subespacio

$$\Rightarrow S = \{v \in V / f(v) = 0 \ \forall f \in S^\circ\}$$

Dem: llamamos T a ese conjunto, vemos que $S = T$ con la doble inclusion.
$\subseteq$: Tomando un $s \in S$ sale por definicion de S°

$\supseteq$: Por el absurdo suponemos que hay un v en T y no en S. Tomamos una base de S y le agregamos v, luego completamos a base de V: $\{v_1 \ldots v_s, v, v_{s+2} \ldots v_n\}$
Sean φ_i los elementos de la base dual, entonces $\{\varphi_{s+1} \ldots \varphi_n\}$ es una base de S°. Llegar al absurdo usando $\varphi_{s+1}(v)$

Doble dual

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dim(V) = n < \infty$. Si definimos $L : V \to V^{**}$ como $L(v) = L_v$, con $L_v(f) = f(v)\ \forall f \in V^* \Rightarrow L$ es un isomorfismo

Dem: hacen falta probar tres cosas:
• Es lineal: alcanza con ver que $L_{(\lambda v+w)} = \lambda L_v + L_w$ que sale por definicion.

• Es mono: utilizando que L es mono $\iff$ $L(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ se llega a que v anula a toda f del dual $\Rightarrow$ $v = 0$

• Es epi: utilizar que existe un isomorfismo entre un espacio y su dual, entonces las dimensiones de V, V^* y V^{**} son la misma. Luego L es mono $\iff$ L es epi.

Corolario: *Si $dim(V) < \infty$, sea $\varphi \in V^{**}$ $\Rightarrow$ $\exists! v \in V$ / $\varphi = L_v$*
Esto vale porque tenemos el isomorfismo anterior, que asegura la existencia por la sobreyectividad y la unicidad por la inyectividad.

5 Determinantes

Matriz adjunta y calculo de inversas

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con elementos $(A)_{ij} = a_{ij}$. Definimos su matriz adjunta como $adj(A) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con elementos $(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j}det(A(j|i))$

$$\Rightarrow \; A \; adj(A) = det(A)I_n$$

Dem: Tomamos cada posicion (l,k) de la multiplicacion $A \; adj(A)$ y separamos en los casos

- Si $l = k$: desarrollamos por definicion y llegamos al "desarrollo por fila l" de A, obteniendo $det(A)$
- Si $l \neq k$: desarrollamos por definicion y llegamos al "desarrollo por fila k" de una matriz $\bar{A}$. Esta es igual a A pero tiene en la fila k la fila l. Luego como tiene dos filas iguales y det es M.A. $\Rightarrow det(\bar{A}) = 0$

Corolario: Si $A \in GL(n,\mathbb{K}) \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A)$

Regla de Cramer

Sean $A \in GL(n,\mathbb{K})$ y $x, b \in \mathbb{K}^n$ tales que $Ax = b$

$$\Rightarrow \; x_i = \frac{1}{det(A)}det(A_1|\dots|A_{i-1}|b|A_{i-1}|\dots|A_n) = \frac{det(\bar{A}_i)}{det(A)}$$

Dem: Partiendo de $Ax = b$ multiplicamos a ambos lados por $adj(A)$, por la prop anterior obtenemos $det(A)x = adj(A)b$. Viendo posicion a posicion se llega a que el segundo lado de la igualdad es el "desarrollo por columna i" de la matriz $\bar{A}_i$

6 Diagonalizacion

Los autoespacios estan en suma directa

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $\lambda_1 \dots \lambda_r$ todos sus autovalores ($\lambda_i \neq \lambda_j$) $\Rightarrow E_{\lambda 1} \dots E_{\lambda r}$ estan en suma directa en $\mathbb{K}^n$

Dem: lo hacemos por induccion sobre la cantidad de autovalores (distintos).

- $r = 2$: Tomar un v en la interseccion de autoespacios y ver que tiene que ser 0 usando que $Av = \lambda_1 v = \lambda_2 v$
- $r \Rightarrow r+1$: fijamos un j y tomamos un $v \in E_{\lambda j} \cap \sum_{i\neq j}^{r} E_{\lambda i}$ vemos que tiene dos escrituras distintas en $\sum_{i\neq j} E_{\lambda i}$ que es un espacio de dimension menor a $r+1$, entonces por HI los autoespacios estan en suma directa $\iff$ la escritura es unica. Usando esto llegamos a que $v = 0$

La dimension del autoespacio es menor a la multiplicidad en el caracteristico

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con λ uno de sus autovalores $\Rightarrow$ $dim(E_\lambda) \leq mult(\lambda, \mathcal{X}_A)$

Dem: Tomamos una base de E_λ $\{v_1 \dots v_s\}$ y la completamos a una base del espacio $\beta = \{v_1 \dots v_s, v_{s+1}, \dots v_n\}$, obteniendo

$$|\mu_A|_\beta = \begin{pmatrix} \lambda I & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Como es una matriz por bloques con el bloque $(1,2)$ siendo 0, entonces el caracteristico es por bloques

$$\mathcal{X}_A = (x-\lambda)^s det(xI - C)$$

Criterio de diagonalizacion del polinomio caracteristico

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con $\lambda_1 \dots \lambda_r$ todos sus autovalores en $\mathbb{K}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$). Son equivalentes:

(1) A es diagonalizable en $\mathbb{K}^n$
(2) $\oplus_{i=1}^{r} E_{\lambda i} = \mathbb{K}^n$
(3) $\mathcal{X}_A = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_r)^{a_r}$ con $dim(E_{\lambda i}) = a_i$

Dem:
• (1) $\Rightarrow$ (2): Sabemos que siempre vale que $\oplus_{i=1}^{r} E_{\lambda i} \subseteq \mathbb{K}^n$, vemos la otra inclusion tomando la base de autovectores y viendo que esta contenida en la suma directa

• (2) $\Rightarrow$ (3): Planteamos la ecuacion

$$n = \sum_{i=1}^{r} dim(E_{\lambda i}) \underset{(b)}{\leq} \sum_{i=1}^{r} a_i \underset{(a)}{\leq} gr(\mathcal{X}_A) = n$$

Y vemos que tanto (a) como (b) son igualdades.

• (3) $\Rightarrow$ (1): Como $\sum a_i = n$ y siempre los autoespacios estan en suma directa, tomamos $\beta = \cup_{i=1}^{r} \beta_i$ la union de las bases de los autoespacios, que resulta en base de la suma de estos. Luego $\#\beta = n$, entonces la suma de los espacios es todo $\mathbb{K}^n$ y β es base de autovectores.

Existencia y unicidad del polinomio minimal

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\Rightarrow \exists! p \in \mathbb{K}[X]$ *de grado minimo y monico tal que* $p(A) = 0$

Dem:
•Existencia: consideramos $C = \{gr(p)\ /\ p \in \mathbb{K}[X],\ p \neq 0,\ p(A) = 0\}$. Ver que no es vacio considerando una C.L igualada a 0 de un conjunto l.d. cuyos elementos son potencias de A. como $C \subseteq \mathbb{N}$ entonces tiene minimo, lo tomamos y lo dividimos por su coeficiente para que sea monico.

•Unicidad: Tomamos p, q polinomios que cumplan, los restamos y vemos que existe un polinomio de grado menor que se anula en A. Esto solo puede pasar si $p = q$.

Autovalores y raices del minimal

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \text{ Es autovalor de } A \iff \lambda \text{ es raiz de } m_A$$

Dem:
$\Rightarrow$: Queremos ver que $(x-\lambda)|m_A$, usamos el algoritmo de division en polinomios y vemos que el resto sea 0 evaluando en A y multiplicando por el autovector asociado.

$\Leftarrow$: Escribimos $m_A = q(x-\lambda)$. Evaluando en A concluimos que $q(A) \neq 0$ entonces tomamos $v \notin Ker(q(A))$ y vemos que es un autovector asociado a λ.

Teorema de Cayley-Hamilton

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $m_A|\mathcal{X}_A$ *(o equivalente* $\mathcal{X}_A(A) = 0$*)*

Dem: Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $f(v) = Av$
Tomamos $v \in \mathbb{K}^n$ y el conjunto $\{v, f(v) \dots f^k(v)\}$ tal que sea l.i. y lo completamos a base de $\mathbb{K}^n$
Como $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{|f|_E} = \mathcal{X}_{|f|_\beta}$ se prueba con un lema que

$$\mathcal{X}_{|f|_\beta} = m_v\ \mathcal{X}_N \;\Rightarrow\; m_v|\mathcal{X}_A$$

Donde N es la submatriz $(2,2)$ si pensamos a $|f|_\beta$ por bloques. Tomando una base cualquiera $\{v_1 \dots v_n\}$, $m_{v_i}|\mathcal{X}_A$ por lo tanto el $mcm\{m_{v_1} \dots m_{v_n}\} = m_A$ lo divide.

Criterio de diagonalizacion del polinomio minimal

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$A \text{ es diagonalizable } \iff m_A = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_r)$$

Dem:
$\Rightarrow$: Tomamos una base de autovectores, cada uno tiene minimal $m_{v_i} = (x - \lambda_{k_i})$. Usamos que el minimal de A es el mcm de minimales de una base.

$\Leftarrow$: Buscamos ver que $v \in \mathbb{K}^n \;\Rightarrow v \in \oplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$.
Tomamos la t.l multiplicar por A y la restringimos al subespacio invariante $S = < A^r v >_{r\geq 0}$ y le

tomamos la base $\{v, Av \dots A^k v\}$. Asi $\mathcal{X}_{|\mu_A|_S|_\beta} = m_v$ y este a su vez divide al minimal de A. Por lo tanto al restringir encontramos que es diagonalizable la restringida y su base de autovectores esta contenida en la suma directa de los autoespacios. Luego todo v se puede escribir en la suma de algunos subespacios.

7 Subespacios invariantes

Relaciones entre el caracteristico y minimal restringidos

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ lineal y $S \subseteq V$ un subespacio f invariante

$$(1)\ \mathcal{X}_{f|_S} | \mathcal{X}_f$$
$$(2)\ m_{f|_S} | m_f$$

Dem: Tomamos una base de S y la extendemos a base de V. Para (1) Vemos $|f|_\beta$ y le calculamos el caracteristico. Para (2) vemos que el minimal restringido es el mcm de la base de S, que divide al mcm de la base de V que es el minimal de f.

Transformaciones lineales sobre subespacios invariantes en suma directa

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ lineal y sean $S, T \subseteq V$ subespacios f invariantes tales que $S \oplus T = V$

$$(1)\ \mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{f|_S} \mathcal{X}_{f|_T}$$
$$(2)\ m_f = mcm\{m_{f|_S}, m_{f|_T}\}$$

Dem: tomamos una base de S y una de T, juntandolas son base de V pues estan en suma directa. Para (1) escribimos la matriz en esta base y calculamos el caracteristico. Para (2) basta con ver que $m_f | mcm\{m_{f|_S}, m_{f|_T}\}$ viendo que el segundo se anula en $|f|_\beta$. Para esto usamos que evaluar el polinomio en la matriz es evaluar el polinomio en los bloques.

8 Formas de Jordan para transformaciones nilpotentes

Las contenciones de nucleos en una transformacion nilpotente son estrictos

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ nilpotente de indice k

$$\{0\} \subsetneq Ker(f) \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(f^k) = V$$

<u>Dem</u>: Sabemos que $Ker(f^k) = V$ y que las inclusiones siempre valen, falta ver que son estrictas. Probamos que si $Ker(f^j) = Ker(f^{j+1}) \Rightarrow Ker(f^{j+1}) = Ker(f^{j+2})$ Luego si existe algun indice j menor al de nilpotencia en donde esto pasa todos los nucleos son iguales, llegando a que j es el indice de nilpotencia ABS!

Lema clave para Jordan nilpotente

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sean $f : V \to V$ lineal, $j \in \mathbb{N}$. Si $\{v_1 \dots v_r\}$ es un conjunto l.i y $Ker(f^j) \cap < v_1 \dots v_r >= \{0\}$

$$\Rightarrow \{f(v_1) \dots f(v_r)\} \text{ es l.i y } Ker(f^{j-1}) \cap < f(v_1) \dots f(v_r) >= \{0\}$$

<u>Dem</u>: Tomamos un elemento de la interseccion y partiendo de $0 = f^{j-1}(v) = f^{j-1}(\sum \alpha_i f(v_i))$ llegamos a que $\alpha_i = 0\ \forall i$, resultando en ambas condiciones que queriamos.

Existencia de la forma de Jordan para nilpotentes

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ nilpotente de indice $k \Rightarrow \exists \beta$ base de V tal que

$$|f|_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

Con $J_i \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$ bloques de Jordan nilpotentes de tamaño $k = n_1 \geq \cdots \geq n_r$

<u>Dem</u>: recursivamente armamos desde “el final” hasta el principio.
• Caso base: Tomamos una base del $\beta_{k-1} = Ker(f^{k-1})$ y la completamos a base de V con $C_k = \{v_1^{(k)}, \dots v_{r_k}^{(k)}\} \neq \varnothing$. De esta forma conseguimos que

- $\beta_{k-1} \cup C_k$ es base de V
- $Ker(f^{k-1}) \oplus < C_k >= V$
- $f(C_k) \subseteq Ker(f^{k-1})$ es conjunto l.i
- $Ker(f^{k-2}) \cap f(C_k) = \{0\}$

• Paso recursivo: supongamos que tenemos construidos los conjuntos l.i

$$C_k \subset Ker(f^k), \dots C_{j+1} \subset Ker(f^{j+1})$$

Tales que $f(C_h) \subset Ker(f^{h+1})$, $Ker(f^j) \oplus < C_{j+1} >= Ker(f^{j+1})$ y $Ker(f^j) \oplus < C_{j+1} > \oplus \cdots \oplus < C_k >= V$
Justificando con el lema tecnico podemos tomar $C_j = \{v_1^{(j)}, \dots v_{r_j}^{(j)}\} \cup f(C_{j+1})$, es decir que a partir del C_{j+1} podemos construir el C_j.

Cuando termine la recursion vamos a haber encontrado conjuntos que esten todos en suma directa con el espacio V. Tomando β como la union de los conjuntos, reordenandola obtenemos el resultado deseado.

Bloques de Jordan nilpotentes

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ forma de Jordan nilpotente de indice k ($A = |f|_\beta$ donde f es nilpotente de indice k)

$$\begin{aligned}
&(1)\text{El bloque mas grande de Jordan de } A \text{ tiene tamaño } k \\
&(2)\#\text{Bloques de tam} > i \ := b_i = rg(A^i) - rg(A^{i+1}) \\
&(3)\#\text{Bloques de tam} = i \ := c_i = rg(A^{i-1}) - 2rg(A^i) + rg(A^{i+1})
\end{aligned}$$

Dem:
(1): Como A esta escrita por bloques (subespacios invariantes que suman todo el espacio) entonces $X^k = m_A = mcm\{m_{J_1} \dots m_{J_r}\} = \{X^{n_1} \dots X^{n_r}\}$. Si los bloques estan ordenados por tamaño, entonces el primer bloque tiene tamaño k.

(2):

$$A^i = \begin{pmatrix} J_1^i & & & \\ & J_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^i \end{pmatrix} \qquad rg(J_l^i) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } i \geq l \\ n_l - i \ \text{ si } i < l \end{cases}$$

Luego podemos expresar que el rango de A^i es la cantidad de bloques de tamaño i por el rango de ese bloque: $rg(A^i) = \sum_{j=i+1}^{r} c_j(j-i)$. Con esta expresion podemos llegar a lo buscado.

(3): Usando (2) y planteando $b_{i-1} - b_i$ llegamos al resultado buscado.

Formas semejantes son la misma

Si $J, J' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son formas de Jordan nilpotentes tales que $J \sim J' \Rightarrow J = J'$

Dem: Como son semejantes entonces sus potencias son semejantes entonces todas sus potencias tienen los mismos rangos. Como los bloques quedan univocamente determinados por los rangos entonces son formas iguales.

Unicidad de la forma de Jordan nilpotente

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ nilpotente $\Rightarrow \exists!$ forma de Jordan nilpotente tal que $J = |f|_\beta$ para alguna base

Dem: Si hay 2 distintas entonces son semejantes a traves de f, entonces son iguales.

Criterio de semejanza con Jordan

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotenes con J, J' sus formas de Jordan

$$A \sim B \iff J = J'$$

Dem: $A \sim B \iff A \sim J \sim J' \sim B \iff J \sim J' \iff J = J'$

9 Forma de Jordan general

Existencia de la forma de Jordan general

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ lineal tal que $m_f = (X-\lambda_1)^{k_1} \dots (X-\lambda_s)^{k_s}$ $\Rightarrow \exists \beta$ base de V tal que

$$|f|_\beta = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s) \end{pmatrix} \quad J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^i) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_i, n_{r_i}^i) \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u>: Lo hacemos por induccion sobre cantidad de autovalores distintos.
• $s = 1$: Observamos que $(f - \lambda I)$ es una t.l nilpotente de indice k entonces existe una base de V tal que $|f - \lambda I|_\beta$ tiene forma de Jordal nilpotente.
Luego vemos que $|f|_\beta = |f - \lambda I|_\beta + |\lambda I|_\beta$ Entonces

$$|f|_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix}$$

• $s \Rightarrow s+1$: Tomamos del minimal de f polinomios p y q coprimos, entonces podemos restringir f en los nucleos de $p(f)$ y $q(f)$ que son espacios f invariantes, estan en suma directa con el espacio V y los minimales de f restringida a ellos son p y q respectivamente. Luego como ambas f's restringidas estan en la HI, tienen bases que las dejan en forma de Jordan, que uniendolas nos dan una base de V en donde la f sin restringir tiene forma de Jordan.

La forma de Jordan es unica

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $dimV = n$. Sea $f : V \to V$ lineal tal que m_f se factoriza linealmente $\Rightarrow \exists!$ forma de jordan de f (salvo orden de autovalores)

<u>Dem</u>: Tomamos $\beta = \{v_1 \dots v_n\}$ base de V que lleva a f a su forma de Jordan, como $\lambda_i \neq \lambda_j$ y $|f|_\beta$ es por bloques:

$$(J - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} J(0) & & & \\ & J(\lambda_2 - \lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s - \lambda_1) \end{pmatrix} \text{ y } (J - \lambda_1 I)^{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & J(\lambda_2 - \lambda_1)^{k_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s - \lambda_1)^{k_i} \end{pmatrix}$$

Con $J(\lambda_j - \lambda_1)^{k_i} \in GL(d_j, \mathbb{K})$
Si restringimos f al nucleo de $(f - \lambda_1 I)^{k_1} =< \beta_1 >$ con $\beta_1 = \{v_1 \dots v_{d_1}\}$. Asi la f restringida en base β_1 es $J(0)$ y como la forma de Jordan nilpotente es unica $J(\lambda_1) = J(0) + \lambda_1 I \Rightarrow J(\lambda_1)$ es unica.
Haciendo este proceso para cada autovalor probamos que cada bloque es de una unica forma.

10 Espacios con producto interno

Proceso de ortogonalizacion de Gram-Schmidt

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$, $(V, <,>)$ *un* K *espacio vectorial con producto interno. Sea* $\beta = \{v_1 \dots v_r\}$ *base de* V

$$\Rightarrow \exists \tilde{\beta} = \{w_1 \dots w_n\} \text{ bon de } V \ / \ < v_1 \dots v_k > = < w_1 \dots w_k > \ \forall k = 1 \dots n$$

<u>Dem</u>: construimos una base ortogonal con z_i's y luego la podemos tomar ortonormal sin cambiar la propiedad de generar 1 a 1 el mismo espacio.
Recursivamente construimos los elementos de la base de la siguiente forma, el recursivo asumiendo que tenemos construidos los primeros r elementos

$$z_1 = v_1$$
$$z_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{< v_{r+1}, z_i >}{\|z_i\|^2} z_i$$

Luego resta probar que agregar el elemento $r+1$ a la base mantiene las propiedades de ser un conjunto ortogonal y generar el mismo espacio que los v_i's pero hasta $r+1$

Suma de un subespacio y su ortogonal

Sea $(V, <,>)$ *un* K *espacio vectorial con producto interno de dimension finita,* $S \subseteq V$ *subespacio*

$$\Rightarrow \ V = S \oplus S^{\perp}$$

<u>Dem</u>:
• $S \cap S^{\perp} = \{0\}$: $v \in S \cap S^{\perp}$, $< v, v >= 0 \ \Rightarrow v = 0$

•$S + S^{\perp} = V$: Como la interseccion es en 0, basta ver que la suma de las dimensiones es n. Tomando una base de S, completandola a una de V y aplicando G-S obtenemos una bon de S y queremos probar que el resto de los vectores son base de $S^{\perp}$. Facilmente probamos la contencion del generado por estos en $S^{\perp}$. Si suponemos que no son el mismo conjunto entonces la dimension de $S^{\perp}$ es mayor a $n-s$, esto nos conduce a un absurdo. Luego la dimension de $S^{\perp}$ es $n-s$, probando lo que queriamos.

Distancia a subespacios

Sea $(V, <,>)$ *un* K *espacio vectorial con producto interno de dimension finita,* $S \subseteq V$ *subespacio y* $v \in V$

$$\Rightarrow d(v, S) = \|v - P_S(v)\|$$

<u>Dem</u>: Tomamos $\beta = \{v_1 \dots v_n\}$ bon de V tal que $\{v_1 \dots v_s\}$ es bon de S y tomamos $w \in S$. Consideramos su resta

$$v - w = \sum_{i=1}^{s} < v - w, v_i > v_i \ + \sum_{i=s+1}^{n} < v, v_i > v_i$$

Luego el w que minimize la distancia tambien minimizara la distancia al cuadrado. Utilizando que β es bon

$$(d(v,w))^2 = \|v - w\|^2 = \sum_{i=1}^{s} | < v - w, v_i > |^2 \ + \sum_{i=s+1}^{n} | < v, v_i > |^2 \geq \sum_{i=s+1}^{n} | < v, v_i > |^2$$

Luego el w que minimize esta expresion es el que haga de esa desigualdad una igualdad. A partir de esto llegamos a que

$$\text{Vale la igualdad} \iff \sum_{i=1}^{s} | < v - w, v_i > |^2 = 0 \iff < v, v_i > = < w, v_i > \ \forall i = 1 \dots s$$

Concluimos que $(w)_\beta = (P_S(v))_\beta$

Existencia de la transformacion adjunta

Sea $(V, <,>)$ un K espacio vectorial con producto interno de dimension finita, $f : V \to V$ lineal

$$\Rightarrow \exists! \ f^* : V \to V \ \text{ lineal tal que } \ \forall v, w \in V \ < f(v), w > = < v, f^*(w) >$$

Dem:

• Unicidad: Tomamos dos funciones que cumplen la propiedad, llegando a

$$\forall v, w \in V \ < v, f_1(w) > = < v, f_2(w) > \iff \forall w \in V \ f_1(w) = f_2(w) \iff f_1 = f_2$$

• Existencia: Para que cumpla la propiedad deseada definimos que dada una bon $\{v_1 \dots v_n\}$ entonces $f^*(w) = \sum < w, f(v_i) > v_i$ y vemos que cumple

1. Es lineal: vale pues el p.i es lineal en la primer coordenada.
2. Cumple propiedad de adjunta: desarrollamos por separado $< f(v), w >$ y $< v, f^*(w) >$ y vemos que llegan a una expresion comun.

Transformaciones autoadjuntas

Sea $(V, <,>)$ un K espacio vectorial con producto interno de dimension finita, $f : V \to V$ lineal. Son equivalentes

$$\begin{aligned}&(1) f \text{ es autoadjunta}\\ &(2) \forall \beta \text{ bon de } V \ |f|_\beta \text{ es hermitiana}\\ &(3) \exists \beta \text{ bon de } V \ |f|_\beta \text{ es hermitiana}\end{aligned}$$

Dem:

• (1) $\Rightarrow$ (2): Sea β bon de V, probamos que $|f^*|_\beta = |f|_\beta^*$. Luego como es autoadjunta, para toda bon $|f|_\beta$ es hermitiana.

• (2) $\Rightarrow$ (3): Trivial

• (3) $\Rightarrow$ (1): Sea β bon de V tal que $|f|_\beta = |f|_\beta^*$. Como vimos la relacion entre matrices de f y su adjunta en (1) $\Rightarrow$ (2), llegamos a que estas coinciden en una base, concluyendo que son iguales.

Autovalores de transformaciones autoadjuntas

Sea $(V, <,>)$ *un* $K(= \mathbb{C}, \mathbb{R})$ *espacio vectorial con producto interno de dimension finita,* $f : V \to V$ *autoadjunta*

$$\Rightarrow \mathcal{X}_f \in \mathbb{K}[\mathbb{X}] \text{ se factoriza linealmente sobre } \mathbb{R}[X]$$

Dem:
• $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Como estamos en los complejos entonces el caracteristico seguro se factoriza linealmente en el cuerpo. Vemos que los autovalores en realidad caen en $\mathbb{R}$ tomando λ autovalor y v su autovector asociado. Planteando la ecuacion siguiente llegamos a:

$$\lambda \|v\|^2 = \overline{\lambda} \|v\|^2$$

Luego como $v \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

• $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Tomamos una bon β y llamamos $A := |f|_\beta$, A es real y simetrica (mas general es hermitiana). Luego tomamos $\mu_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (multiplicar por A), que es autoadjunta para el p.i canonico en $\mathbb{C}$ y ademas su caracteristico se factoriza linealmente sobre $\mathbb{C}$. Ademas comparte autovalores con A. Por lo tanto llevamos el problema a $\mathbb{C}$ que ya pudimos resolver.

Diagonalizacion de transformaciones autoadjuntas

Sea $(V, <,>)$ *un* $K(= \mathbb{C}, \mathbb{R})$ *espacio vectorial con producto interno de dimension finita,* $f : V \to V$ *autoadjunta*

$$\Rightarrow \exists \beta \text{ bon de } V / \ |f|_\beta = D \text{ diagonal real}$$

Dem: Lo hacemos por induccion sobre $n = dim(V)$
• $n = 1$: $f(v) = \lambda v$ pues es un espacio de dimension 1, como f es autoadjunta sabemos que λ es real.

• $n - 1 \Rightarrow n$: Como f es autoadjunta puedo tomar un autovalor λ real y su autovector w asociado. Definimos $S = < \frac{w}{\|w\|} >^\perp$ y probamos que es f invariante. Luego tomamos $f|_S$ que es autoadjunta en un espacio de dimension $n - 1$ entonces por HI existe una base β_S bon tal que $|f|_S|_\beta$ es diagonal real. Como $S \oplus S^\perp = V$ puedo tomar $\beta = \{\frac{w}{\|w\|}\} \cup \beta_S$ que resulta bon y $|f|_\beta$ es diagonal real.