Recuperatorio de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

13 de Marzo, 2008

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (**20 p.**) Una lista l de pares de naturales se llama *camino de longitud n que comienza en a_0* si

$$l = [\langle a_0, a_1\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \ldots, \langle a_{n-2}, a_{n-1}\rangle, \langle a_{n-1}, a_n\rangle].$$

Sea $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ una función tal que $f(l, a_0, n)$ devuelve el camino más largo de longitud menor o igual a n que comienza en a_0 y tal que todos los elementos del camino (es decir, los pares de naturales) son elementos de la lista l. Si no existe tal camino, la función debe devolver cero; si existe más de uno, debe devolver cualquiera de ellos. Demostrar que f es primitiva recursiva.

Ejercicio 2. (**40 p.**) Sea el conjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ definido como

$$B = \{\langle x, y\rangle \mid \text{ existe } z \text{ tal que } \Phi_x(z)\downarrow, \Phi_y(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x(z) > \Phi_y(z)\}$$

a) (**20 p.**) Decidir si B es computable y demostrarlo.

b) (**20 p.**) Decidir si $\overline{B}$ es r.e. y demostrarlo.

Ejercicio 3. (**40 p.**) Sean los conjuntos $K, K_0 \subseteq \mathbb{N}$ definidos como

$$\begin{aligned} K_0 &= \{x \mid \Phi_x(x)\downarrow\} \\ K &= \{\langle x, y\rangle \mid \Phi_x(y)\downarrow\} \end{aligned}$$

Demostrar que

a) (**10 p.**) existe una función primitiva recursiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{N}$,

$$x \in K_0 \quad \text{sii} \quad f(x) \in K$$

b) (**20 p.**) existe una función primitiva recursiva $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_x(y)\downarrow \quad \text{sii} \quad \Phi_{h(x,y)}(h(x,y))\downarrow$$

Ayuda: usar el Teorema del Parámetro.

c) (**10 p.**) existe una función primitiva recursiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{N}$,

$$x \in K \quad \text{sii} \quad g(x) \in K_0$$

Ayuda: usar el item b.