Parcial de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2011

El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. Todas las soluciones deben estar debidamente justificadas. El parcial se aprueba con 6 puntos.

Ejercicio 1 (3 pts)**.** Sea $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que $f(x+1) < x+1$ para todo x, y sea $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{aligned} h(x,0) &= k \\ h(x,t+1) &= g(x,t,h(x,f(t+1))) \end{aligned}$$

Demostrar que si f y g pertenecen a una clase PRC $\mathcal{C}$, entonces también h pertence a $\mathcal{C}$.

Resolución. Comencemos por definir las funciones $h_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y $h_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ del siguiente modo:

$$h_1(x,y) = [h(x,0), h(x,1), ..., h(x,y)]$$

$$\begin{aligned} h_2(x,0) &= [k] \\ h_2(x,t+1) &= h_2(x,t) \circ [g(x,t,h_2(x,t)_{[f(t+1)]}] \end{aligned}$$

La concatenación ('$l_1 \circ l_2$') y la indexación ('$l_{[i]}$') de listas están en toda clase PRC, con lo que en particular están en $\mathcal{C}$. Como por hipótesis f y g también están en $\mathcal{C}$ y h_2 está definida mediante el esquema de recursión primitiva usando sólo funciones de $\mathcal{C}$, también h_2 está en $\mathcal{C}$. Veamos ahora que $h_1 = h_2$. La prueba la haremos por inducción en t.

Caso base. $t = 0$.

$$\begin{aligned} h_1(x,0) &= [h(x,0)] && \text{(por definición de } h_1\text{)} \\ &= [k] && \text{(por definición de } h\text{)} \\ &= h_2(x,0) && \text{(por definición de } h_2\text{)} \end{aligned}$$

Paso inductivo. Tomemos como hipótesis inductiva $h_1(x,t) = h_2(x,t)$, y veamos que $h_1(x,t+1) = h_2(x,t+1)$.

$$
\begin{aligned}
h_1(x,t+1) &= [h(x,0),h(x,1),...,h(x,t),h(x,t+1)] && \text{(por def de } h_1\text{)}\\
&= [h(x,0),h(x,1),...,h(x,t)] \circ [h(x,t+1)] && \text{(por def de `}\circ\text{')}\\
&= h_1(x,t) \circ [h(x,t+1)] && \text{(por def de } h_1\text{)}\\
&= h_1(x,t) \circ [g(x,t,h(x,f(t+1)))] && \text{(por def de } h\text{)}\\
&= h_1(x,t) \circ [g(x,t,[h(x,0),h(x,1),...,h(x,t)]_{[f(t+1)]})] && \text{(por hipótesis } f(t+1) < t+1\text{)}\\
&= h_1(x,t) \circ [g(x,t,h_1(x,t)_{[f(t+1)]})] && \text{(por def de } h_1\text{)}\\
&= h_2(x,t) \circ [g(x,t,h_2(x,t)_{[f(t+1)]})] && \text{(por H.I.)}\\
&= h_2(x,t+1) && \text{(por def de } h_2\text{)}
\end{aligned}
$$

Con esto hemos probado que h_1 está en $\mathcal{C}$. Finalmente, podemos definir h usando composición del siguiente modo:

$$h(x,t) = h_1(x,t)_{[t]}$$

Por lo tanto, también h está en $\mathcal{C}$.

$\square$

Ejercicio 2 (3 pts)**.** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función parcial computable y A un conjunto *c.e.* Sea B el siguiente conjuto:

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \cdot \ y \in A \text{ y } f(y) = x\}$$

I. Demostrar que B es *c.e.*

II. Elegir f y A (que cumplan con las hipótesis del ejercicio) de forma tal que B resulte *co-c.e.*

III. Elegir f y A (que cumplan con las hipótesis del ejercicio) de forma tal que B no resulte *co-c.e.*

Resolución. .

I. Como A es un conjunto *c.e.*, existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial computable tal que $A = \text{Dom } g$. Sea $\mathcal{P}$ un programa que computa g y p_0 su número de programa. Veamos como se relacionan A y $\mathcal{P}$. Sea $x \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
x \in A &\iff x \in \text{Dom } g && (A = \text{Dom } g)\\
&\iff g(x)\downarrow\\
&\iff \Psi^{(1)}_{\mathcal{P}}(x)\downarrow && (\mathcal{P} \text{ computa } g)\\
&\iff \exists\ _t \cdot \left[\text{STP}^{(1)}(x,p_0,t)\right] && \text{(def de STP)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Por otro lado, como por hipótesis la función f es parcial computable, existe un programa $\mathcal{Q}$ que la computa. Sea q_0 el número de programa de $\mathcal{Q}$ y $x,y \in \mathbb{N}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
f(x) = y &\iff \Psi^{(1)}_{\mathcal{Q}}(x) = y && (\mathcal{Q} \text{ computa } f)\\
&\iff \exists\ _t \cdot \left[\text{STP}^{(1)}(x,q_0,t) \wedge r(\text{SNAP}^{(1)}(x,q_0,t))_{[1]} = y\right] && \text{(def de STP y SNAP)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Analicemos ahora la pertenecia en B. Sea $x \in \mathbb{N}$. Usando (1) y (2) podemos razonar del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
x \in B \quad &\iff \quad \exists_{\,y} \cdot \Big[y \in A \text{ y } f(y) = x\Big] \\
&\iff \quad \exists_{\,y} \cdot \Big[\exists_{\,t_1} \cdot \Big[\mathrm{STP}^{(1)}(y, p_0, t_1)\Big] \text{ y } f(y) = x\Big] \\
&\iff \quad \exists_{\,y} \cdot \Big[\exists_{\,t_1} \cdot \Big[\mathrm{STP}^{(1)}(y, p_0, t_1)\Big] \text{ y } \exists_{\,t_2} \cdot \Big[\mathrm{STP}^{(1)}(y, q_0, t_2) \wedge r(\mathrm{SNAP}^{(1)}(y, q_0, t_2))_{[1]} = x\Big]\Big] \\
&\iff \quad \exists_{\,y}\ \exists_{\,t_1}\ \exists_{\,t_2} \cdot \Big[\mathrm{STP}^{(1)}(y, p_0, t_1) \wedge \mathrm{STP}^{(1)}(y, q_0, t_2) \wedge r(\mathrm{SNAP}^{(1)}(y, q_0, t_2))_{[1]} = x\Big] \\
&\iff \quad \exists_{\,\langle y, \langle t_1, t_2\rangle\rangle} \cdot \Big[\mathrm{STP}^{(1)}(y, p_0, t_1) \wedge \mathrm{STP}^{(1)}(y, q_0, t_2) \wedge r(\mathrm{SNAP}^{(1)}(y, q_0, t_2))_{[1]} = x\Big]
\end{aligned}
$$

Definamos ahora $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ del siguiente modo,

$$
h(x) = \exists_{\,\langle y, \langle t_1, t_2\rangle\rangle} \cdot \Big[\mathrm{STP}^{(1)}(y, p_0, t_1) \wedge \mathrm{STP}^{(1)}(y, q_0, t_2) \wedge r(\mathrm{SNAP}^{(1)}(y, q_0, t_2))_{[1]} = x\Big]
$$

La función h es parcial computable, dado que está definida como un existencial sobre un predicado primitivo recursivo. Por otro lado, es inmediato que $x \in B$ si y sólo si $x \in \mathrm{Dom}\ h$. Por lo tanto, B es *c.e.*

En los incisos II y III usaremos que un conjunto C es computable si y sólo si C es *c.e.* y C es *co-c.e.* (visto en la teórica).

II. Tomando $A = \mathbb{N}$ y $f(x) = x$, se tiene que

$$
B = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \cdot \ y \in \mathbb{N} \text{ y } y = x\}
$$

En este caso resulta $B = \mathbb{N}$. En consecuencia B es computable, y por lo tanto también *co-c.e.*

III. Tomando $A = \{z \in \mathbb{N} : \ \mathrm{HALT}\ (z,z)\ \}$ y $f(x) = x$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
B &= \Big\{x \in \mathbb{N} : \exists y \cdot \ y \in \{z \in \mathbb{N} : \ \mathrm{HALT}\ (z,z)\ \} \text{ y } y = x\Big\} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{N} : x \in \{z \in \mathbb{N} : \ \mathrm{HALT}\ (z,z)\ \}\ \Big\} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{N} : \ \mathrm{HALT}\ (x,x)\ \Big\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, B no es computable. Supongamos que B es *co-c.e.* Por el punto I sabemos que B es *c.e.*, con lo que B resultaría computable, lo cuál es absurdo.

$\square$

Ejercicio 3 (2 pts)**.** Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que las siguiente función no es computable:

$$
g(\#p) = \begin{cases} 2 \times \#p & \text{si } k \in \mathrm{Dom}\Psi_p^{(1)} \\ 2 \times \#p + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Resolución. Supongamos g computable. Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida como

$$
f(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\#p) \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Como g y el chequeo de paridad son funciones computables, también f resulta computable. Por otro lado, f es la función característica del conjunto

$$\begin{aligned} F &= \{\#p \in \mathbb{N} : f(\#p) = 1\} \\ &= \{\#p \in \mathbb{N} : g(\#p) \text{ es par }\} && \text{(por def de } f) \\ &= \{\#p \in \mathbb{N} : g(\#p) = 2 \times \#p\} && \text{(por def de } g) \\ &= \{\#p \in \mathbb{N} : k \in \mathrm{Dom}\Psi_p^{(1)}\} && \text{(por def de } g) \end{aligned}$$

Veamos ahora que F es un conjunto de índices no trivial.

1. $\#(\mathrm{Y} \longleftarrow 1) \in F$, con lo que $F \neq \emptyset$.

2. $\#([\mathrm{A}]$ IF Z=0 GOTO A$) \notin F$, con lo que $F \neq \mathbb{N}$.

3. Supongamos $\#p \in F, \Psi_p^{(1)} = \Psi_q^{(1)}$, y veamos que entonces $\#q \in F$.

$$\begin{aligned} \#p \in F \quad &\Longrightarrow \quad k \in \mathrm{Dom}\Psi_p^{(1)} \\ &\Longrightarrow \quad \Psi_p^{(1)}(k) = n && \text{(para algún } n \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow \quad \Psi_q^{(1)}(k) = n && \text{(pues } \Psi_p^{(1)} = \Psi_q^{(1)}) \\ &\Longrightarrow \quad k \in \mathrm{Dom}\Psi_q^{(1)} \\ &\Longrightarrow \quad \#q \in F \end{aligned}$$

Como F cumple con las hipótesis del teorema de Rice, F no es computable. Es decir que su función característica f no es computable. Absurdo! El absurdo provino de suponer que g era una función computable.

□

Ejercicio 4 (2 pts)**.** Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y justificar (i.e., dar un contraejemplo o una demostración).

I. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es tal que Dom$f$ y Imf son ambos computables, entonces f es computable.

II. Si $A \cup B$ es *c.e.*, entonces al menos uno de los dos es *c.e.*

Resolución. .
I. Falso. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(x) = \mathrm{HALT}(x, x)$$

Dom $f = \mathbb{N}$ y Im $f = \{0, 1\}$ son ambos computables, pero sin embargo f no lo es.

II. Falso. Sea $A = $ TOT y $B = \mathbb{N}\setminus$ TOT. Como se ha visto en la teórica, TOT no es *c.e.* ni *co-c.e.*, con lo que ni A ni B son *c.e.* Sin embargo, $A \cup B = \mathbb{N}$ sí lo es.

□