Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer parcial (7/10/2023) - 2do C. 2023

TEMA 3

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
R	B	B	B	9

[redacted]

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

1. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + z^2 - 4x + 2z = 11, \quad y + z = 3.$$

(a) Dar una parametrización de C.

(b) Hallar todos los puntos de C cuyas rectas tangentes sean perpendiculares al plano dado por $x = 4$.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{xy - 4y}{2(x-4)^2 + y^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{4\,\mathrm{sen}((y-3)^2)\ln(1+x)}{x^2 + (y-3)^2}$.

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{x^4 + 3y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente al gráfico de f en el punto $(4, -1, f(4,-1))$ es

$$-5x + y - z = 7.$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(s,t) = (t^2 e^s + t^2 + 2,\ 2s + s^4 - 1 - sen(t)s^2)$.

Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \circ g$ en $(0, 1, f \circ g\,(0,1))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

ejercicio 1:

(A) $x^2+z^2-4x+2z=11$ y $y+z=3$ de esta despejo z

$z=3-y$

$x^2+(3-y)^2-4x+2(3-y)=11$

$x^2+(3-y)^2-4x+6-2y=11$

$x^2+(3-y)^2-4x-2y=5$

$(x-2)^2-4+(3-y)^2-2y=5$

$(x-2)^2-4+y^2-6y+9-2y=5$

$(x-2)^2-4+y^2-8y+9=5$

$(x-2)^2-4+(y-4)^2-16+9=5$

$(x-2)^2+(y-4)^2=5+4-9+16$

$(x-2)^2+(y-4)^2=16$ → ahora llegué a algo que sí se parametrizar

puedo completar los cuadrados

$(x-2)^2=x^2-4x+4$

$(3-y^2)^2=3^2-2.3.y+y^2$

$9-6y+y^2$

$(y^2-4)^2=y^2-8y+16$

lo puedo reescribir como

$(x-2)^2+(y-4)^2=4^2$

propongo $x=4.\cos\theta+2$

$y=4.\operatorname{sen}\theta+4$

para conseguir z reemplazo y en $z=3-y$

$z=3-(4\operatorname{sen}\theta+4)$

$z=-4\operatorname{sen}\theta-1$

entonces una parametrización de C sería

$$\left[C=\left\{(4\cos\theta+2,\ 4\operatorname{sen}(\theta)+4,\ -4\operatorname{sen}\theta-1),\ \theta\in[0,2\pi]\right\}\right]$$

b) cualquier punto del plano $x=4$ puede escribirse como $(4,y,z)$

~~necesito que el vector de la recta tangente en el punto director~~

~~sea perpendicular al (4,y,z)~~

el vector director ~~es~~ de la recta tangente en cualquier punto lo consigo derivando C.

$C'(\theta) = \{(-4\,\text{sen}\,\theta, 4\cos\theta, -4\cos\theta) / \theta \in [0, 2\pi]\}$

~~$(-4\,\text{sen}\,\theta, 4\cos\theta, -4\cos\theta)\cdot(4, y, z) = 0$~~

~~$(-4\,\text{sen}\,\theta)\,4 + 4y\cos(\theta) - 4z\cos(\theta) = 0$~~

una recta es perpendicular a un plano cuando sus vectores directores son ~~perpendicular~~ paralelos entre sí.

$(-4.\,\text{sen}\,\theta, 4\cos\theta, -4\cos\theta) = (4, y, z)$

$-4.\,\text{sen}\,\theta = 4$ ~~$\cos / \text{sen}\,\theta$~~

$\text{sen}\,\theta = -1$ pasa cuando $\theta = \frac{3\pi}{2}$

entonces un punto que cumple que su recta tangente sea perpendicular al plano $x = 4$ es

$C(3/2\,\pi) = (4.\cos(3/2\,\pi) + 2, 4\,\text{sen}(3/2\,\pi) + 4, -4\,\text{sen}\,\theta(3/2\,\pi) - 1)$

$C(3/2\,\pi) = (2, 0, 3)$

no

?

¿a qué te referís?

Ejercicio 2:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \dfrac{xy-4y}{2(x-4)^2+y^2}$ ver cuánto dan con límites iterados.

$$\lim_{x\to4}\left(\lim_{y\to0}\frac{xy-4y}{2(x-4)^2+y^2} = \frac{0}{2(x-4)^2}\right) = 0$$

como los iterados dan 0, si el límite existe debe ser 0.

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to4}\frac{xy-4y}{2(x-4)^2+y^2} = \frac{4y-4y}{y^2}\right) = \lim_{y\to0}\frac{\overset{0}{\cancel{4y-4y}}}{\cancel{y^2}} = 0$$

Pruebo intersecarlo con curvas que pasen por el punto (4,0)

$y=(x-4)$ pasa por $(4,0)$ cuando $x=4$

$$\lim_{x\to4}\frac{x(x-4)-4(x-4)}{2(x-4)^2+(x-4)^2} = \lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x-4)}{3(x-4)^2} =$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)^2}}{3\cancel{(x-4)^2}} = \frac{1}{3}$$

como encontré una curva que hace que el límite tenga como resultado algo distinto a 0, entonces el límite no existe.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{4\operatorname{sen}((y-3)^2)\cdot\ln(x+1)}{x^2+(y-3)^2}$

~~Primero~~ veo los límites iterados

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to3}\frac{4\operatorname{sen}((y-3)^2)\cdot\ln(x+1)}{x^2+(y-3)^2} = \frac{0}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to3}\left(\lim_{x\to0}\frac{4\cdot\operatorname{sen}((y-3)^2)\cdot\ln(x+1)}{x^2+(y-3)^2} = \frac{0}{(y-3)^2}\right) = 0$$

como los límites iterados dan 0, si el límite existe debe ser 0.

~~Pruebo intersecarlo con curvas que pasen por el (0,3)~~

~~$x=y-3$ pasa por $(0,3)$ cuando $y=3$~~

$$\cancel{\lim_{y\to3}\frac{4\cdot\operatorname{sen}((y-3)^2)\cdot\ln(y-2)}{(y-3)^2+(y-3)^2} = \lim_{y\to3}\frac{4\operatorname{sen}((y-3)^2)\ln(y-2)}{2(y-3)^2}}$$

Por álgebra de límites, vale decir que el límite original es igual a

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \underbrace{\frac{4\cdot\ln(x+1)\cdot(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2}}_{\text{a este límite lo llamo A}} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\operatorname{sen}((y-3)^2)}{(y-3)^2}}_{\text{y este límite lo conocemos y da 1 porque } (y-3)^2\to 0 \text{ con } y=3.}$$

a lo único que vale es que exista

Por esto, en realidad solo tengo que ver la existencia del límite A

sino no vale álg de lim.

~~...~~ Los iterados de A dan 0.

Los resuelvo.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 3} \frac{4\ln(x+1)(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2} = \frac{0}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 3}\left(\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(x+1)(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2} = \frac{0}{(y-3)^2}\right) = 0$$

Si al límite A lo intersecto con la curva $x = y-3$ que pasa por el $(0,3)$ cuando $y=3$, debería dar 0.

$$\lim_{y\to 3} \frac{4\cdot\ln(y-2)\cdot(y-3)^2}{(y-3)^2+(y-3)^2} = \lim_{y\to 3} \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\ln(y-2)\cancel{(y-3)^2}}{\cancel{2}\cancel{(y-3)^2}}$$

$$= \lim_{y\to 3} 2\ln(y-2) = 0$$

esto tiende a 0 porque $y-2$ tiende a 1

Sospecho que el límite A existe y es 0. Intento demostrarlo con el lema del sandwich.

$$0 \le \left| \frac{4\cdot\ln(x+1)\cdot(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2} - 0 \right| = \frac{4\cdot|\ln(x+1)|\cdot(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2}$$

distribuí los módulos y se los saqué a los cuadrados

$$\le 4\cdot|\ln(x+1)| = 0$$ cuando $x\to 0$ porque $x+1\to 1$ y el $\ln(1)\to 0$.

porque $\frac{A}{A+B} \le 1$ si A, B son positivos

entonces como el límite A queda encerrado por izquierda y por derecha entre 0, puedo decir que existe y vale 0.

[Como el límite A existe y da 0, el original también existe y es 0, por álgebra de límites.]

Ejercicio 3:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{x^4+3y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) me piden calcular todas las derivadas direccionales en el (0,0) si existen.

para esto necesito generalizar las direcciones.
elijo $v=(a,b)$ donde v tiene norma 1
como v tiene norma 1 entonces $a^2+b^2=1$

para probar que las derivadas direccionales existen, en el (0,0), el siguiente límite debe existir.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(a,b)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4 \cdot a^4 \cdot t^2 \cdot b^2}{t\cdot(t^4a^4+3t^6b^6)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6 \cdot a^4 \cdot b^2}{t^4(a^4+3t^2b^6)\,t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{t\cdot a^4 \cdot b^2}^{\to 0}}{a^4+\underbrace{3t^2b^6}_{\to 0}} = \frac{0}{a^4}$$

para todas las direcciones donde a es distinto de 0, las derivadas direccionales en el (0,0) existen y dan 0.

Hay solo un vector de norma 1 donde a es igual a 0, y es (0,1), que coincide con la derivada parcial en y de la función.

si la derivada parcial en y existe, la función va a tener derivadas direccionales en cualquier dirección en el punto (0,0)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0\cdot h^2}{(0+3h^6)\cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\cdot h^2}{3h^7} = 0$$

~~entonces~~ veo que $f_y(0,0)=0$.

[Por lo tanto, existen todas las derivadas direccionales en el punto (0,0) y todas son iguales a 0.]

b) En todo punto (x y) distinto de (0,0) la función es diferenciable por ser una división entre 2 funciones diferenciables

En el (0 0) sospecho que es diferenciable porque del 3 A sé que el gradiente de la función en (0 0) es igual a 0, por lo que cumpliría el teorema del gradiente por el vector.

$$\nabla F(0\,0) \cdot (a,b) = 0 \quad \forall (a,b) \text{ de norma } 1$$

para probar que es diferenciable en el (0 0), necesitamos que el siguiente límite exista y sea igual a 0.

$$\lim_{xy \to 00} \frac{F(x\,y) - [F_x(00)(x-0) + F_y(00)(y-0) + F(00)]}{\|(x-0, y-0)\|}.$$

Como el gradiente es 0, si la función es diferenciable el plano tangente al $(0,0,F(00))$ va a existir y ser $z=0$.

resuelvo el límite

$$\lim_{xy \to (00)} \frac{x^4 y^2}{(x^4+3y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

hago los límites iterados

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x^4 y^2}{(x^4+3y^6)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{x^4 \cdot \sqrt{x^2}} \right) = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^4 y^2}{(x^4+3y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{3y^6 \sqrt{y^2}} \right) = 0$$

como ya sospecho que es diferenciable en el (0 0) intento demostrar que el límite es 0 con el lema de Sandwich.

$$0 \le \left| \frac{x^4 y^2}{(x^4+3y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{x^4 y^2}{(x^4+3y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} =$$

como todo es positivo, puedo sacar los módulos

$$\frac{x^4 y^2}{(x^4+3y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{\|(x\,y)\|} \le \frac{\|(x\,y)\|^2}{\|(x\,y)\|}$$

≤ 1 $\quad \frac{A}{A+B} \le 1$ si A, B positivos

$|y| \le \|(x\,y)\|$

$\le \|(x\,y)\|$ que tiende a 0 cuando $xy \to (00)$,

[Como el límite existe y da 0, la función es diferenciable en el (0 0), por lo que es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.]

Ejercicio 4:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable

Plano tangente en $(4, -1, f(4,-1))$ = es

$$-5x + y - z = 7$$
$$-z = 7 + 5x - y$$
$$\underline{z = -7 + -5x + y}$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad g(s t) = (t^2 e^s + t^2 + 2,\ 2s + s^4 - 1 - \operatorname{sen}(t) s^2)$

Quiero calcular el plano tangente de $f \circ g$ en $(0, 1, f \circ g(0\,1))$

Para eso necesito el gradiente de $f \circ g$ en el $(0\,1)$ y el valor de $f \circ g$ en el $(0\,1)$

observo que g es diferenciable porque tiene funciones diferenciables en ambas coordenadas.

entonces puedo conseguir $\nabla f \circ g(0\,1)$ usando matrices.

$\nabla f \circ g(0\,1) = \nabla f(g(0\,1)) \cdot \operatorname{Dif} g(0\,1)$

como $f \circ g(s t)$ ~~...~~, es una composición de funciones diferenciables en todo su dominio, $f \circ g(s t)$ también lo será

$g(0\,1) = (1 + 1 + 2,\ 0 + 0 - 1 - 0)$

$g(0\,1) = (4, -1)$

$\nabla f(g(0\,1)) = \underbrace{\nabla f(4, -1)}$

y esto lo puedo obtener de la ecuación del plano.

$z = -7 - 5x + y \qquad f_x(4,-1) = -5 \ \ y \ \ f_y(4,-1) = 1$

$f(4,-1) = -7 - 5 \cdot 4 + (-1) = -28$

entonces $\nabla f(4,-1) = (-5, 1)$

Ahora necesito el $\operatorname{Dif} g(0\,1)$

$$g = (t^2 e^s + t^2 + 2,\ 2s + s^4 - 1 - \operatorname{sen}(t) s^2)$$

$$\operatorname{Dif} g(s t) = \begin{pmatrix} t^2 e^s & 2te^s + 2t \\ 2 + 4s^3 - 2\operatorname{sen}(t) s^2 & -\cos(t) s^2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Dif} g(0\,1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla fog(0,1) = (-5, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\nabla fog(0,1) = (-5+2, -20+0)$

$\nabla fog(0,1) = (-3, -20)$

el plano tangente de $(0,1, fog(0,1))$ sería

antes calculé que $f(4,-1) = -28$

$-3(s-0) - 20(t-1) - 28 = z$

$-3s - 20t + 20 - 28 = z$

$-3s - 20t - 8 = z$

$\boxed{\text{Rta} = z = -3s - 20t - 8}$