7 HOJAS

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	M	7,5

APELLIDO, NOMBRE: [redacted]
CARRERA: Lic. Cs Com[redacted]ón

NÚMERO DE LIBRETA O DNI: [redacted]
TURNO DE PRÁCTICA: 3

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2023 - Recuperación del Segundo Parcial - 25/7/2023

Escribir con tinta y con letra clara. Usar hojas separadas para ejercicios distintos.
No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left(\left(\frac{-9-9i}{2}\right)4i\right)^{61n^2+59}$$

?

sea un número real positivo.

Ejercicio 2. a) Hallar, si existe, un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumpla simultáneamente:

- $\sqrt{3}$ es raíz doble de f,
- $(X^2+4) \mid (f : f')$,
- $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}\big((-5X^3-6)^3 + 125X^9 + X^8 - 2X\big)$.

b) ¿Cuál es el máximo común divisor $(f : f')$?

Ejercicio 3) Hallar los posibles restos de dividir a $n \in \mathbb{N}$ por 68 sabiendo que

$$\left(n^{832} + 17n + 390 : 1156\right) = 4$$

Ejercicio 4. a) Hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que $w = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ sea raíz del polinomio

$$f = X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + c$$

b) Para el valor de c hallado, factorizar f como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ sabiendo que no tiene raíces racionales.

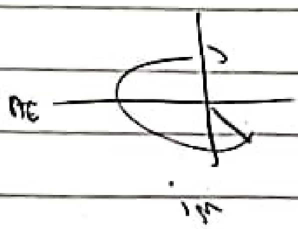
EJERCICIO 1

(1)

$n\in\mathbb{Z}$ $\left(\left(\frac{-9-9i}{2}\right)\cdot 4i\right)^{61n^2+59} \in \mathbb{R}_{>0}$

$\left(-9(1+i)\cdot 2i\right)^{61n^2+59}$

$(\underbrace{18-18i}_{w})^{61n^2+59}$ $\arg(w)=\frac{7}{4}\pi$



Si me dicen que es un real positivo, quiere decir que su parte imaginaria es cero $k\in[0,2\pi)$

$(61n^2+59)\,\frac{7}{4}\pi = 2k\pi$

$(61n^2+59)\cdot 7\pi = 8k\pi$

$427n^2\pi + 413\pi = 8k\pi$

paso a congruencia

$427n^2+413 = 8k \iff 427n^2+413\equiv 0\ (8)$

$\iff 3n^2+5\equiv 0\ (8) \iff 3n^2\equiv 3\ (8) \iff n^2\equiv 1\ (8)$

$n^2\equiv 1\ (8)$

$\Updownarrow$

$\boxed{n\equiv 1\ (2)}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

$\therefore$ Todos los $n\in\mathbb{Z}$ son todos los números impares. $n\equiv 1(8)$, $n\equiv 3(8)$, $n\equiv 5(8)$, $n\equiv 7(8)$

B

Hoja (2)

conjugado de $\sqrt{3}$

2) a) $F \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow -\sqrt{3}$ es raíz también $(x^2+4)^2$ en F

$(x+2i)^2 \cdot (x-2i)^2 (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$\cancel{(x+2i)^2 \cdot (x-2i)^2}\ (x-\sqrt{3}) \cdot (x+\sqrt{3}) = x^2 + \cancel{\sqrt{3}x} - \sqrt{3}x - 3$

$(x^2+4)^2 \ (x^2-3)$

$(x^2+4)(x^2+4) = x^4 + 4x + 4x + 16 = x^4 + 8x + 16$

$(x^4+8x+16)(x^2-3) = x^6 + 8x^3 + 16x^2 - x^4 - 24x + 48$

$x^6 - x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 24x - 48$

$gr(F) = gr\left((-5x^3-6)^3 + 125x^9 + x^8 - 2x\right)$

$(-5x^3-6)(-5x^3-6) = 25x^6 + 30x^3 + 30x^3 + 36$

$(25x^6 + 60x^3 + 36) \cdot (-5x^3-6) =$

$= -125x^9 - 300x^6 - 180x^3 - 150x^6 - 360x^3 - 216$

$\cancel{-125x^9} - 300x^6 - 180x^3 - 150x^6 - 360x^3 - 216 + \cancel{125x^9}$
$+ x^8 - 2x =$

$gr(-450x^6 - 540x^3 + x^8 - 2x - 216) = gr(F)$

$= 8$

ocho

2b)

Aporte ③

2b)

$F(x) = x^8 + 2x^6 - 23x^4 - 24x^2 + 144$

$(x^2+4)(x^2-3) = x^4 - 3x^2 + 4x^2 - 12 =$

$= x^4 + x^2 - 12$

$$\begin{array}{l|l} x^8 + 2x^6 - 23x^4 - 24x^2 + 144 & x^4 + x^2 - 12 \\ \hline -[x^8 + x^6 - 12x^4] & x^4 + x^2 - 12 \\ \quad x^6 - 11x^4 - 24x^2 + 144 & \\ -[x^6 + x^4 - 12x^2] & \\ \quad -12x^4 - 12x^2 + 144 & \\ -[-12x^4 - 12x^2 + 144] & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$\therefore$ mi $MCD(F:F') = x^4 + x^2 - 12$

B

3) $n \in \mathbb{N}$ y $(68, n) = ?$

$$\begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 2^2 \cdot 17 \qquad \begin{array}{r|l} 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$(\overbrace{n^{832} + 17n + \underbrace{2\cdot 3\cdot 5\cdot 13}_{?}}^{x} : \boxed{2^2} \cdot 17^2) = \boxed{2^2}$$

$$\begin{array}{r|l} 1156 & 2 \\ 578 & 2 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$4 \mid x$, que $2^3 \nmid x$, que $17 \nmid x$

$2 \overset{?}{\mid} x \iff n^{832} + n + 390 \equiv n^{832} + n \ (2)$

si $2 \mid n \Rightarrow 2 \mid x \Rightarrow n$ podría ser par

si $2 \nmid n \overset{PTF}{\Rightarrow} n \equiv 1 \ (2) \Rightarrow 2 \mid x$

$1 + 1 = 2 \equiv 0 \ (2)$, $\Rightarrow n$ es un número impar.

Tengo que es $n \equiv 0 \ (2)$ ó $n \equiv 1 \ (2)$

$17 \overset{?}{\mid} x \iff n^{832} + 17n + 390 \equiv n^{832} + 16 \ (17)$

No que $17 \nmid x$, pues si dividiese, estaría en el MCD,

$\Rightarrow$ si $17 \mid n \Rightarrow 17 \nmid x$ que, pero si $17 \nmid n \overset{PTF}{\Rightarrow}$

$n^{16} \equiv 1 \ (17) \Rightarrow \underbrace{(n^{16})}_{\equiv 1}{}^{52} + 16 \equiv 17 \equiv 0 \ (17)$

Tengo que si n es múltiplo de 17, no divide, justo como quiero ver que, pero si no es múltiplo utilizando Fermat me da que si divide a x, cosa que no quiero.

$\therefore 17 \mid n$ y $17 \nmid x$.

Me faltaría ver en módulo 4:

$4 \mid x \iff n^{832} + n + 390 \equiv 0 \ (4) \iff$

$n^{832} + n + 2 \equiv 0 \ (4)$

Si n es par: $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ $(2k)^{832} + 2k + 2 \equiv 2^{832} \cdot k^{832} + 2k + 2$

$\equiv 2^2 \cdot 2^{830} \cdot k^{832} + 2k + 2 \equiv 2k + 2 \equiv 2(k+1) \ (4)$

$\iff k \equiv 3 \ (4)$ ó $k \equiv 1 \ (4)$

1) a) $c \in \mathbb{R}$ $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ $w \in G_3$

$F = x^6 - x^5 + x^4 + 81x^2 - 81x + c$

$1 - x^2 + x + 81x^2 - 81 + c$

$80x^2 + x - 80 + c = 0$

$80x^2 + x + c = 80$ ~~mal~~

$x(80x+1) + x + c = 80$

$F(x^3) = (x^3)^6 - (x^3)^5 + (x^3)^4 + 81(x^3)^2 - 81x^3 + c$

$= \cancel{1^6} - \cancel{1^5} + 1^4 + \cancel{81} - \cancel{81} + c$

$= 1 + c$

AHORA ENTONCES $F(x^3) = 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$

$\therefore c = -1$

b) YO SE QUE G_3 ESTÁ CONFORMADO POR:

$1, \quad \underbrace{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= x^2 + \frac{x}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}.i.x}{2}} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}i}{4}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}.i}{2}x} +$

$+ \cancel{\frac{\sqrt{3}i}{4}} + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1$

4a) HOJA 6

$w \in G_3$: $F(w) = 0$

G_3 está conformado por: 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
El enunciado dice que no tiene raíces racionales

$F(w) = w^6 - w^5 + w^4 + 81w^2 - 81w + c = 0$

$= 1 - w^2 + w + 81w^2 - 81w + c = 0$

$= 1 + 80w^2 - 80w + c = 0$

$\Leftrightarrow 80w(w - 1) = -(1 + c)$

$80 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1\right) = -1 - c$

$80 \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = -1 - c$

$= \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \cancel{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + c = 0$

$\frac{40\sqrt{3}i}{2} + 1 + c = 0$

4a)

$N \in G_3 : F(w) = 0$

G_3 está conformado por: $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

El número w que no tiene raíces racionales es

$F(w) = w^6 - w^5 + w^4 + 81w^2 - 81w + c = 0$

$= 1 - w^2 + w + 81w^2 - 81w + c = 0$

$= 1 + 80w^2 - 80w + c = 0$

$80w(w - 1) = -(1 + c)$

$80 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1\right) = -1 - c$

$80 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = -1 - c$

$= \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{3\sqrt{3}}{4} i - \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1 + c = 0$

$\frac{40\sqrt{3}i}{2} + 1 + c = 0$

4a) — P.o.f(4)

$W \in G_3 : F(W) = 0$

G_3 está conformado por: $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
El número que no tiene raíces enteras

$F(W) = W^6 - W^5 + W^4 + 81W^2 - 81W + C = 0$

$= 1 - W^2 + W + 81W^2 - 81W + C = 0$

$= 1 + 80W^2 - 80W + C = 0$

$* \; 80W(W-1) = -(1+C)$

$80 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1\right) = -1 - C$

$80 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = -1 - C$

$= \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \cancel{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + C = 0$

$\frac{40\sqrt{3}i}{2} + 1 + C = 0$