Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer parcial (7/10/2023) - 2do C. 2023

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B.+	B.	B+/B+	B +	10

TEMA 2

10

Nro de práctica: 1

Apellido: Kiszkurno

Nombre: Nicolás

Nro. de libreta:

Carrera: Lic. en Ciencias de Datos

5 hojas

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

1. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies

$$y^2 + z^2 - 4y + 2z = 11, \quad x + z = 1.$$

   (a) Dar una parametrización de C.

   (b) Hallar todos los puntos de C cuyas rectas tangentes sean perpendiculares al plano dado por $y = 5$.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{xy - 3y}{4(x-3)^2 + y^2}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{2\ln(1+x)\,\mathrm{sen}((y-2)^2)}{x^2 + (y-2)^2}$.

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{5x^6 + y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

   (b) Analizar la diferenciabilidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente al gráfico de f en el punto $(-1, 2, f(-1,2))$ es

$$-4x + y - z = 6.$$

   Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(s,t) = (3s + s^3 - 1 - sen(t)s^2, t^2e^s + t)$.

   Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \circ g$ en $(0, 1, f \circ g\,(0,1))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

Nicolás Kiszkurno

HOJA Nº 1

FECHA 7/10/23

1) Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por la intersección de las superficies: $y^2+z^2-4y+2z=11$, $x+z=1$

a) Dar una parametrización de $\mathcal{C}$.

b) Hallar todos los puntos de $\mathcal{C}$ cuyas rectas tangentes sean perpendiculares al plano dado por $y=5$.

La primera superficie es un cilindro, mientras que la segunda es un plano.

$$y^2+z^2-4y+2z=11 \Leftrightarrow (y-2)^2+(z+1)^2=11+2^2+1^2=16$$

Este es un cilindro de radio 4 (circular) centrado en la recta $L: \lambda(1,0,0)+(0,2,-1)$. Voy a parametrizarlo como si fuera una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

$$(y-2)^2+(z+1)^2=4^2 \Rightarrow \begin{cases} y-2=4\cdot\sin(t) \\ z+1=4\cdot\cos(t) \end{cases} \quad \text{con } t\in[0,2\pi)$$

Luego, despejo: $\begin{cases} y=4\sin(t)+2 \\ z=4\cos(t)-1 \end{cases}$, $t\in[0,2\pi)$.

Defino $t\in[0,2\pi)$ para no perder la unicidad de escritura. Ahora, me queda despejar x de la segunda ecuación: $x+z=1 \Leftrightarrow x=1-z$

$$\mathcal{C}(t)=\begin{cases} x=x \\ y=4\sin(t)+2 \\ z=4\cos(t)-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=2-4\cos(t) \\ y=4\sin(t)+2 \\ z=4\cos(t)-1 \end{cases} \text{ con } t\in[0,2\pi)$$

Ahora puedo definir $r:[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ con

$$r(t)=\big(2-4\cos(t),\ 4\sin(t)+2,\ 4\cos(t)-1\big).$$

Luego, r parametriza a $\mathcal{C}$ pues $\mathrm{Im}(r)=\mathcal{C}$.

NOTA

Sea el plano Π $y=5$.

$y=5 \Leftrightarrow y-5=0 \Leftrightarrow 0=(x-0, y-5, z-0)\cdot(0,1,0)$.

Luego, la normal del plano Π es $(0,1,0)$. ✓

Entonces, las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que sean perpendiculares a Π serán paralelas al vector $(0,1,0)$. ✓

Calculo $r'(t)$.

$r'(t)=(4\sin(t), 4\cos(t), -4\sin(t))$ ✓

Como la dirección de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en un punto $r(t_0)$ para algún $t_0 \in [0, 2\pi)$ está dada por el vector $r'(t_0)$, necesito buscar los $t_0 \in [0,2\pi)$ tales que $r'(t_0) \,/\!/\, (0,1,0)$ ✓ Es decir,

$r'(t_0)=\lambda(0,1,0)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uso esta ecuación.

$$(4\sin(t_0), 4\cos(t_0), -4\sin(t_0))=\lambda(0,1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\sin(t_0)=0 \\ 4\cos(t_0)=\lambda \\ -4\sin(t_0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(t_0)=\frac{\lambda}{4} \to t_0 \in \mathbb{R} \text{ (no me dice nada)} \\ \sin(t_0)=0 \to t_0=0 \vee t_0=\pi \end{cases}$$ ✓

Ahora que encontré los t_0, verifico que $r'(t_0) \perp \Pi$.

$r'(0)=(0,4,0)=4(0,1,0)$ ✓

$r'(\pi)=(0,-4,0)=-4(0,1,0)$ ✓

Entonces, los puntos de $\mathcal{C}$ cuya recta tangente es perpendicular a Π son:

$r(0)=(-2,2,3) \begin{cases} 2^2+3^2-4\cdot 2+2\cdot 3=11 ✓ \\ -2+3=1 ✓ \end{cases} (-2,2,3)\in\mathcal{C}$

$r(\pi)=(6,2,-5) \begin{cases} 2^2+(-5)^2-4\cdot 2+2\cdot(-5)=11 ✓ \\ 6-5=1 ✓ \end{cases} (6,2,-5)\in\mathcal{C}$

NOTA

Nicolás Kiszkurno

HOJA N° 2

FECHA 7/10/23

2) Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{xy - 3y}{4(x-3)^2 + y^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{(x-3)y}{4(x-3)^2 + y^2}$

Supongo que el límite existe y vale $L \in \mathbb{R}$. Luego, si lo analizo por cualquier curva continua que pase por el punto $(3,0)$, el límite va a seguir siendo igual a L. Formalmente, si tengo una $r: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = (3,0)$ para algún $t_0 \in I$, entonces $\lim\limits_{t \to t_0} f \circ r(t) = L$ con $f(x,y) = \frac{(x-3)y}{4(x-3)^2 + y^2}$.

Primero, uso un iterado.

$$L = \lim_{x \to 3} \lim_{y \to 0} \frac{(x-3)y}{4(x-3)^2 + y^2} = \lim_{x \to 3} \frac{0}{4(x-3)^2} = \lim_{x \to 3} 0 = 0.$$

Segundo, uso la curva $y = x - 3$.

$$L = \lim_{y \to 0} \frac{y \cdot y}{4 \cdot y^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{y^2}}{5 \cancel{y^2}} = \frac{1}{5}$$

Como $0 = L = \frac{1}{5}$ es un absurdo, entonces el límite no existe, como había supuesto.

$$\therefore \nexists \lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{(x-3)y}{4(x-3)^2 + y^2} \quad \blacksquare$$

b) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2\ln(1+x)\sin((y-2)^2)}{x^2+(y-2)^2} \overset{y\neq 2}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2\ln(1+x)\sin((y-2)^2)(y-2)^2}{[x^2+(y-2)^2](y-2)^2}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \underbrace{2\ln(1+x)}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\dfrac{(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2}}_{\text{ACOTADO}} \cdot \underbrace{\dfrac{\sin((y-2)^2)}{(y-2)^2}}_{\downarrow\, 1} = 0$

Justificación

•) $\left|\dfrac{(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2}\right| \leq 1$, por lo que está acotado.

•) $2\ln(1+x) \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0 = 2\ln(1)$

Luego, por la propiedad "cero por acotado",

$2\ln(1+x)\cdot\dfrac{(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0$

Además, uso el límite conocido $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ para saber que

$\dfrac{\sin((y-2)^2)}{(y-2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 1$ con $\theta = (y-2)^2$

Entonces, por Álgebra de límites,

$\left[2\ln(1+x)\cdot\dfrac{(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2}\right]\cdot\left[\dfrac{\sin((y-2)^2)}{(y-2)^2}\right] \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0\cdot 1 = 0$

$\therefore \exists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2\ln(1+x)\sin((y-2)^2)}{x^2+(y-2)^2} = 0$ ∎

NOTA

Nicolás Koszkurno HOJA Nº 3

FECHA 7/10/23

3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^4}{5x^6 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

b) Analizar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Primero analizo la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{x^2 y^4}{5x^6 + y^4}$. Este es un cociente, cuyo numerador es un polinomio y cuyo denominador es un polinomio que nunca se anula. Esto se debe a que $(x,y) \neq (0,0)$. Entonces, f es de clase C^1 ✓ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, lo que implica que es diferenciable ✓ y continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Justificación:

$5x^6 + y^4 = 0 \Leftrightarrow -5x^6 = y^4 \Leftrightarrow \sqrt[4]{-5x^6} = |y|$

Pero $\sqrt[4]{-5x^6} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -5x^6 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 \leq 0 \Rightarrow x = 0$ ✓ $(x,y) \neq (0,0)$

Para ver la continuidad de f en $(0,0)$, quiero ver que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - f(0,0) = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^4}{5x^6 + y^4} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} \underbrace{\frac{y^4}{5x^6 + y^4}}_{\text{ACOTADO}} \cdot \underbrace{x^2}_{0} = 0 = f(0,0)$$

Como $x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ y $\left| \frac{y^4}{5x^6 + y^4} \right| \leq 1$ está acotado, entonces

NOTA

el límite existe y vale 0 por la propiedad "cero por acotado". Luego, f es continua en (0,0).

Ahora, analizo sus derivadas direccionales en (0,0).
Sea $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|v\|=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$.
Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big((0,0)+t(a,b)\big)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-0}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2a^2\cdot t^4b^4}{5t^6a^6+t^4b^4}=\lim_{t\to 0}\frac{t^5\cdot ta^2b^4}{t^5(5t^2a^6+b^4)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{t\,a^2b^4}^{\to 0}}{\underbrace{5t^2a^6+b^4}_{\to b^4}}=0 \quad \text{si } b\neq 0.$$

Con $b=0$, tengo una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.
Reemplazo $b=0$ en el último paso.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t\,a^2\cdot 0^4}{5t^2a^6+0^4}=\lim_{t\to 0}0=0.$$

Entonces, todas las derivadas direccionales de f en (0,0) existen y valen 0. En particular,

$$f_x(0,0)=0 \quad \wedge \quad f_y(0,0)=0.$$

Ahora, para analizar la diferenciabilidad de f en (0,0), uso la definición de diferenciabilidad

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}\overset{?}{=}0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-0-0\cdot(x-0)-0\cdot(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^4}{(5x^6+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

NOTA

Nicolás Kisztvurno

HOJA Nº 4

FECHA 7/10/23

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\, y^4}{(5x^6+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^4}{5x^6+y^4}\cdot\frac{\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|x|}\cdot|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underbrace{\frac{y^4}{5x^6+y^4}}_{\text{ACOTADO}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{\text{ACOTADO}}\cdot\underbrace{|x|}_{\to 0} = 0$$

Justificación

•) $\left|\frac{y^4}{5x^6+y^4}\right| \leq 1$ está acotado

•) $\left|\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}\right| \leq 1$ está acotado.

$\Bigg\}$ $\left|\frac{y^4}{5x^6+y^4}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}\right| \leq 1$ está acotado.

•) $|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Luego, por la propiedad de "cero por acotado", el límite existe y vale 0. Entonces, comprobé que f es diferenciable en (0,0). Además, por lo anterior, f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

4) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente al gráfico de f en el punto $(-1, 2, f(-1,2))$ es

$$-4x+y-z=6.$$

Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$g(s,t)=\left(3s+s^3-1-\sin(t)\cdot s^2\ ,\ t^2e^s+t\right)$$

Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de $f\circ g$ en $(0, 1, (f\circ g)(0,1))$.

$g(0,1)=(-1,2) \Rightarrow f\circ g(0,1)=f(-1,2).$

NOTA

Como f es diferenciable en $(-1,2)$, sé que la ecuación de su plano tangente al gráfico de f en $(-1,2,f(-1,2))$ es

$$z = f(-1,2) + f_x(-1,2)(x+1) + f_y(-1,2)(y-2)$$

Busco despejar las incógnitas de la ecuación dada.

$$-4x+y-z=6 \Leftrightarrow z=-4x-4+y-2 \Leftrightarrow z=0-4(x+1)+1(y-2).$$

Luego, $f(-1,2)=0$ ∧ $f_x(-1,2)=-4$ ∧ $f_y(-1,2)=1$.

Analizo la diferenciabilidad de g en $(0,1)$. Veo que

$$g_1(s,t) = 3s+s^3-1-\sin(t)\cdot s^2$$

es una suma y producto entre polinomios y trigonométricas. Entonces, g_1 es diferenciable en $(0,1)$.

Después, veo que

$$g_2(s,t) = t^2 e^s + t$$

es suma y producto entre polinomios y exponenciales. Entonces, g_2 es diferenciable en $(0,1)$.

Luego, g será diferenciable en $(0,1)$.

Entonces, tengo que f y g son funciones diferenciables que se pueden componer como $f \circ g$ en $(s_0,t_0)=(0,1)$. Entonces, $f\circ g$ será diferenciable en $(s_0,t_0)=(0,1)$ y vale que

$$D(f\circ g)(0,1) = Df(g(0,1)) \cdot Dg(0,1)$$

Además, como $g(0,1)=(-1,2)$, $Df(g(0,1)) = Df(-1,2)$.

$$Df(-1,2) = \begin{bmatrix} f_x(-1,2) & f_y(-1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

NOTA

Nicolas Kiszkurno

HOJA N° 5

FECHA 7/10/23

$$Dg(0,1)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s}(0,1) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(0,1)\\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(0,1) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(0,1)\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$ ✓

Calculo las derivadas parciales de g.

$g_1(s,t) = 3s + s^3 - 1 - \sin(t)\cdot s^2$

·) $\frac{\partial g_1}{\partial s}(s,t) = 3 + 3s^2 - 2\sin(t)\cdot s \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial s}(0,1) = 3$

·) $\frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) = -\cos(t)\cdot s^2 \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial t}(0,1) = 0$

$g_2(s,t) = t^2 e^s + t$

·) $\frac{\partial g_2}{\partial s}(s,t) = t^2 e^s \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial s}(0,1) = 1$

·) $\frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t) = 2t e^s + 1 \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial t}(0,1) = 3$ ✓

Luego, $Dg(0,1) = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. ✓

Entonces, $D(f\circ g)(0,1) = [-4 \ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} = [-11 \ \ 3]$

Además, como $f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(0,1)$,

$$D(f\circ g)(0,1) = \left[\frac{\partial (f\circ g)}{\partial s}(0,1) \quad \frac{\partial (f\circ g)}{\partial t}(0,1)\right] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

Luego, $\frac{\partial (f\circ g)}{\partial s}(0,1) = -11$ ✓ y $\frac{\partial (f\circ g)}{\partial t}(0,1) = 3$. ✓

Además, $f\circ g(0,1) = f(g(0,1)) = f(-1,2) = 0$.

Como $f\circ g$ es diferenciable en $(0,1)$, puedo dar la ecuación de su plano tangente al gráfico de $f\circ g$ en $(0,1,(f\circ g)(0,1))$.

NOTA

$$\Pi: z = (f\circ g)(0,1) + \frac{\partial (f\circ g)}{\partial s}(0,1)(s-0) + \frac{\partial (f\circ g)}{\partial t}(0,1)(t-1)$$

Reemplazando con lo obtenido,

$$\Pi: z = 0 + (-11)(s-0) + 3(t-1)$$ ✓

$$\Leftrightarrow z = -11s + 3(t-1)$$

NOTA