Disclaimer: Este apunte no es autocontenido y fue pensado como un repaso de los conceptos, no para aprenderlos de aquí directamente.

1. Límites y continuidad

Definición 1 (Gráfica) *La* gráfica *de una función* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es* $Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)\}$.

Definición 2 (Conjunto de nivel) *El* conjunto de nivel *de valor* c *de una función* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es* $\{\mathbf{x} \in U | f(\mathbf{x}) = c\}$. *Si* $n = 2$ *lo llamamos también* curva de nivel.

Definición 3 (Abierto) *Un conjunto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *es* abierto *sii* $\forall \mathbf{x} \in U\ \exists r > 0\ D_r(x) \subseteq U$.

Teorema 1 (Un disco es abierto) *Para cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r > 0$, $D_r(\mathbf{x})$ *es un conjunto abierto.*

Definición 4 (Frontera) *Los* puntos frontera x *de un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *son los que para toda vecindad de* x *contiene al menos un punto de* A *y un punto de* $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Definición 5 (Límite) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *donde* A *es un abierto. Sea* $\mathbf{x_0}$ *un punto de* A *o frontera de* A. *Decimos que el* límite *de* f *cuando* $\mathbf{x}$ *tiende a* $\mathbf{x_0}$ *es* $\mathbf{b}$ *sii para cualquier vecindad* V *de* $\mathbf{b}$ *existe una vecindad* U *de* $\mathbf{x_0}$ *tal que* $\mathbf{x} \in (U \setminus \{\mathbf{x_0}\})$ *implica* $f(\mathbf{x}) \in V$. *Alternativamente, para todo* ε *existe un* δ *tal que* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta$ *implica* $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$. *Escribimos:*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Teorema 2 (Unicidad de limite) *Si* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b_1}$ *y* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b_2}$ *entonces* $\mathbf{b_1} = \mathbf{b_2}$.

Teorema 3 (Propiedades de límite) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x_0}$ *un punto de* A *o de su frontera,* $\mathbf{b}, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2} \in \mathbb{R}^m$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Se cumple que:*

I *Si* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$.

II *Si* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b_1}$ *y* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b_2}$ *entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}$.

III *Si* $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = b_1$ *y* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} g(\mathbf{x}) = b_2$ *entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = b_1 b_2$.

IV *Si* $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = b$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$ *entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} 1/f(\mathbf{x}) = 1/b$

V *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$ *entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = (b_1, ..., b_n)$ *sii* $\forall i\ \ \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$.

Definición 6 (Continuidad) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Sea* $\mathbf{x_0} \in A$. f *es* continua *en* $\mathbf{x_0}$ *sii* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$. f *es* continua *si es continua en todo punto de su dominio.*

Teorema 4 (Propiedades de funciones continuas) *Sean* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continuas en* $\mathbf{x_0}$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Se cumple que:*

I cf *es continua en* $\mathbf{x_0}$.

II $f + g$ *es continua en* $\mathbf{x_0}$.

III *Si* $m = 1$ fg *es continua en* $\mathbf{x_0}$.

IV *Si* $m = 1$ *y* f *no se anula en* A *entonces* $1/f$ *es continua en* $\mathbf{x_0}$. *Se puede pedir equivalentemente* $f(\mathbf{x_0}) \neq 0$ *ya que* f *es continua y esto implica que sería distinta de* 0 *en una vecindad de* $\mathbf{x_0}$.

V $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$ *sii* $\forall i$ $f_i(\mathbf{x})$ *es continua en* $\mathbf{x_0}$.

Teorema 5 (Composición de continuas es continua) *Sean* $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que* $g(A) \subseteq B$, g *es continua en* $\mathbf{x_0}$ *y* f *es continua en* $g(\mathbf{x_0})$. $f \circ g$ *es continua en* $\mathbf{x_0}$.

Definición 7 (Continuidad uniforme) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. f *es* uniformemente continua *sii para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para toda pareja de puntos de* A $\mathbf{x_0}$ *y* $\mathbf{y_0}$ *tal que* $\|\mathbf{x_0} - \mathbf{y_0}\| < \delta$ *se cumple que* $\|f(\mathbf{x_0}) - f(\mathbf{y_0})\| < \varepsilon$.

Teorema 6 (Una sucesión en un compacto tiene una subsucesión convergente) *Sea* A *un compacto y* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* A. a_n *tiene una subsucesión convergente.*

2. Diferenciación

Definición 8 (Derivada parcial) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde U es un abierto. La* derivada parcial *respecto de la i-ésima variable está dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$$

si el límite existe (sino, la derivada parcial no existe).

Definición 9 (Diferencial) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La* matriz diferencial *de $f = (f_1, ..., f_n)$ $\mathbf{D}f$ está dada por:*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definición 10 (Gradiente) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el* gradiente *de f $\bigtriangledown f$ es la matriz diferencial de $\mathbf{D}f$. O sea, la matriz diferencial tiene por filas los gradientes de las componentes $f_1, ..., f_n$ de f.*

Definición 11 (Diferenciabilidad) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con U abierto. f es* diferenciable *en $\mathbf{x_0} \in U$ si:*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|} = 0.$$

Teorema 7 (Diferenciable implica continua) *Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{x_0} \in U$ entonces es continua en $\mathbf{x_0}$.*

Teorema 8 (C^1 implica diferenciable) *Si existen y son continuas todas las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}$ entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.*

Teorema 9 (Propiedades de la diferencial) *Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $\mathbf{x_0}$ y $c \in \mathbb{R}$. Se cumple que:*

I *cf es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{D}cf(\mathbf{x_0}) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x_0})$.*

II *$f + g$ es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{D}(f + g)(\mathbf{x_0}) = \mathbf{D}f(\mathbf{x_0}) + \mathbf{D}g(\mathbf{x_0})$.*

III *Si $m = 1$ entonces fg es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{D}(fg)(\mathbf{x_0}) = g(\mathbf{x_0})\mathbf{D}f(\mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0})\mathbf{D}g(\mathbf{x_0})$.*

IV *Si $m = 1$ y g no se anula en U entonces f/g es diferenciable y*

$$\mathbf{D}(f/g)(\mathbf{x_0}) = \frac{g(\mathbf{x_0})\mathbf{D}f(\mathbf{x_0}) - f(\mathbf{x_0})\mathbf{D}g(\mathbf{x_0})}{g(\mathbf{x_0})^2}.$$

Teorema 10 (Regla de la cadena) *Sean $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tal que $g(U) \subseteq V$ y U y V son abiertos. Si g es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y f es diferenciable en $g(\mathbf{x_0})$ entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ y*

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x_0}) = \mathbf{D}f(g(\mathbf{x_0}))\mathbf{D}g(\mathbf{x_0}).$$

Definición 12 (Plano tangente) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el* plano tangente *a la gráfica de f en (x_0, y_0) está dado por*

$$z = f(x_0, y_0) + \bigtriangledown f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0).$$

Definición 13 (Derivada direccional) *La* derivada direccional *de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en $\mathbf{x}$ en dirección $\mathbf{v}$ $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ está dada por $\frac{\partial f(\mathbf{x}+t\mathbf{v})}{\partial t}$.*

Teorema 11 (La derivada direccional es el producto de la dirección con el gradiente) *Si f es diferenciable en $\mathbf{x}$ y $\mathbf{v}$ es un vector de norma 1, $\bigtriangledown f(\mathbf{x})\mathbf{v} = f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$.*

Teorema 12 (El gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento) *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bigtriangledown f(\mathbf{x}) \neq 0$ entonces $\bigtriangledown f$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f desde $\mathbf{x}$.*

Teorema 13 (El gradiente es normal a la superficie de nivel) *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con todas sus derivadas parciales existentes y continuas. Si S es una superficie de nivel que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) entonces $\bigtriangledown f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a S.*

Definición 14 (Recta tangente a una superficie) *Sean $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables en t_0. La* recta tangente *en t_0 a la superficie de puntos $(x(t), y(t), z(t))$ está dada por la ecuación $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.*

Teorema 14 (Derivadas parciales iteradas) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Definición 15 (Extremo local) *Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathbf{x_0} \in U$ es un* mínimo local *sii existe una vecindad V de $\mathbf{x_0}$ tal que $\mathbf{x} \in V$ implica $f(\mathbf{x_0}) \geq f(\mathbf{x})$. $\mathbf{x_0}$ es un* máximo local *sii es mínimo local de $-f$. Un punto es* extremo local o relativo *si es mínimo o máximo local. $\mathbf{x_0}$ es* punto crítico *sii f no es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ o si $\mathbf{D}f(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$. Un punto crítico que no es extremo local se llama* punto silla.

Teorema 15 (Los extremos locales son puntos críticos) *Si $\mathbf{x_0}$ es extremo local de f diferenciable en un abierto alrededor de $\mathbf{x_0}$, entonces $\mathbf{x_0}$ es punto crítico de f ($\mathbf{D}f(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$).*

Definición 16 (Hessiano) *El* hessiano *de f en $\mathbf{x_0}$ $\mathbf{H}f(\mathbf{x_0})$ está dado por la matriz de las derivadas parciales segundas dividido 2. Esto es*

$$(\mathbf{H}f(\mathbf{x_0}))_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

El hessiano se utiliza como función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haciendo $\mathbf{H}f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$ donde M es la matriz anteriormente descripta y $\mathbf{x}$ es visto como vector columna (con lo cual $\mathbf{x}^t$ es fila).

Teorema 16 (Polinomio de Taylor) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Los* términos de Taylor *centrado en (x_0, y_0) son:*

0. $f(x_0, y_0)$
1. $\bigtriangledown f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$
2. $(x - x_0, y - y_0)^t \mathbf{H}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)/2$
3. $\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x}(x_0, y_0)(x - x_0)^3/6 + \frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}(x_0, y_0)(y - y_0)^3/6 + \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0)/2 + \frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2/2$

El polinomio de Taylor *de órden k está dado por los términos $0..k$ y el resto está dado por el término $k + 1$ pero evaluado sobre algún punto del segmento $(x, y) - (x_0, y_0)$.*

Teorema 17 (El Hessiano determina el tipo de extremo) *Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^3, $\mathbf{x_0} \in U$ es un punto crítico de f y el $\mathbf{H}f(\mathbf{x_0})$ es definido positivo entonces $\mathbf{x_0}$ es un mínimo relativo. Si es definido negativo, $\mathbf{x_0}$ es un máximo relativo.*

Teorema 18 (Una función sobre un compacto alcanza máximo y mínimo) *Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en $D \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. f alcanza su máximo y mínimo en puntos $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{x_1}$ de D.*

Teorema 19 (Función implícita) *Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sean $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x}, x_{n+1}) \neq 0$. Dada una vecindad V de $\mathbf{x}$ existe una función $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ y*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$$

.

Demo: La existencia de dicha función escapa al alcance de este apunte. La derivada parcial sale de derivar $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ respecto de x_i por regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) &= 0 \\
\frac{\partial f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\partial x_i} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= 0 \\
-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

■

Teorema 20 (Función inversa) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\det(\mathbf{D}f(\mathbf{x})) \neq 0$. Existe una inversa local f^{-1} en una vecindad de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{D}f^{-1} = (\mathbf{D}f)^{-1}$.*

Teorema 21 (Multiplicadores de Lagrange) *Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1. Sea $S = \{\mathbf{x}|g(\mathbf{x}) = c\}$ el conjunto de nivel c de g. Si $\mathbf{x_0}$ es extremo local de f y $\bigtriangledown g(\mathbf{x_0})$ restringida a S entonces existe un λ tal que $\bigtriangledown f(\mathbf{x_0}) = \lambda \bigtriangledown g(\mathbf{x_0})$.*

3. Integración

Definición 17 (Integral) *Sea $f : [a, b]- > \mathbb{R}$. Consideremos la suma $\sum_{a\in A} M_a|a|$ donde A es una partición en intervalos de $[a, b]$ M_a es el supremo de la imagen de f sobre el intervalo a. La* integral superior *se define como el ínfimo de las sumas sobre todas las particiones posibles. La* intergral inferior *se define análogamente pero usando m_a en lugar de M_a (es decir, el ínfimo de la imagen de f sobre el intervalo a) y tomando el supremo del conjunto. Si ambas coinciden, decimos que f es integrable.*

Teorema 22 (Continuas integrables) *Si una función es continua, entonces es integrable.*

Teorema 23 (Teorema fundamental del cálculo) *Si f es continua en $[a, b]$, $x \in (a, b)$ entonces*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Teorema 24 (Cambio de variables) *Sea $T : D \subseteq \mathbb{R}^n \to D'$ diferenciable y biyectiva salvo un conjunto de puntos de medida 0. Sea $f : T(D) \to \mathbb{R}$. Se cumple que*

$$\int_{T(D)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_D f \circ T(\mathbf{x})|\mathbf{D}T|d\mathbf{x}.$$

4. Demostraciones

4.1. Límite y continuidad

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

   Demo: Sea la familia de conjuntos C_n tal que $C_n = \{a \in A|a > s - 1/n\}$. Veamos que C_n es no vacío para todo n. Si lo fuera, eso quiere decir que $A = A \setminus C_n = \{a \in A|a < s - 1/n\}$ y como $s - 1/n < s$, s no podría ser el supremo de A. Ahora sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in C_n$. Es claro que $s-1/n < a_n \leq s$. Eso quiere decir que la sucesión a_n está contenida entre la sucesión $(s-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s)_{n\in\mathbb{N}}$, y ambas convergen a s, por lo tanto a_n converge a s. ■

2. Probar que toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.

   Demo: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión. Supongamos sin pérdida de generalidad que es monótona creciente y sea $s = \sup(A)$ donde $A = \{a|\exists n\ a = a_n\}$. Veamos que a_n converge a s, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |s - a_n| < \varepsilon$. Por definición de supremo, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $a \in A$ tal que $s - a < \varepsilon$. Sea n_0 tal que $a_{n_0} = a$ (existe por la definición de A). Como a_n es monótona para todo $n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n_0}$, entonces $s - a_n < s - a_{n_0} \leq \varepsilon$. ∎

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en $P \in \mathbb{R}^2$. Si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{k\to\infty} P_k = P$, probar que $\lim_{k\to\infty} f(P_k) = f(P)$.

   Demo: Queremos ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que $k \geq k_0 \Rightarrow |f(P_k) - f(P)| < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo Q $\|P - Q\| < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ (existe porque f es continua). Sea entonces k_0 tal que $k \geq k_0 \Rightarrow |P - P_k| < \delta$, que existe porque P_k converge a P. De ambas definiciones se deduce directamente que $k \geq k_0 \Rightarrow |f(P_k) - f(P)| < \varepsilon$, que es lo que queríamos demostrar. ∎

4. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo valor.

   Demo: Supongamos que f no es acotada superiormente. Eso quiere decir que existen valores en la imagen de f superiores a cualquier número real. Sea entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(a_n) > n$. Como a_n es una sucesión de elementos de un compacto K, entonces tiene una subsucesión convergente, llamémosla $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $b_i = a_j$ para algún $j \geq i$ se ve que $f(b_i) > j \geq i$. Sea b el límite de b_n que por ser K compacto pertenece a K. Como f es continua, la sucesión $f(b_n)$ converge a $f(b)$. Pero $f(b_n) > n$, asi que si tomamos $n_0 = [f(b)] + 2$, $n \geq n_0 \Rightarrow f(b_n) > n \geq n_0 > f(b) + 2$ y por lo tanto $|f(b) - f(b_n)|$ es siempre mayor a 1 a partir de n_0, lo cual contradice el que $f(b_n)$ converja a $f(b)$. Esto es un absurdo que proviene de suponer que f no es acotada superiormente. Análogamente se ve que f es acotada inferiormente. Sea s el supremo de la imagen de f y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ tal que $f(a_n)$ converge a s. Dado que a_n tiene una subsucesión convergente, y que esta converge a un a tal que $f(a) = s$, se ve que f alcanza el máximo. Análogamente, f alcanza el mínimo. ∎

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es uniformemente continua.

   Demo: Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen x e y tal que $|x-y| < \delta$ y $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$. Sea entonces la sucesión $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n - b_n < 1/n$ y $|f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon$ (sin pérdida de generalidad asumimos siempre $a_n > b_n$ ya que podemos elegir la pareja contraejemplo para $\delta = 1/n$ en cualquier orden). Dado que (a_n, b_n) es una sucesión en el compacto $[a, b]^2$, tiene una subsucesión convergente. Sea $(c_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicha subsucesión. Dado que $(c_n, d_n) = (a_m, b_m)$ para un $m \geq n$ es claro que $c_n - d_n < 1/m \leq 1/n$. Sea (c, d) el límite de la sucesión (c_n, d_n). Como la sucesión d_n esta acotada superiormente por c_n que tiende a c e inferiormente por $\min(a, c_n - 1/n)$ que también tiende a c, entonces d_n tiende a c y por lo tanto $c = d$. Como f es continua, $f(c_n)$ y $f(d_n)$ ambas deberían tender a $f(c)$ y por lo tanto la sucesión $e_n = f(c_n) - f(d_n)$ debería tender a 0, pero la sucesión $e_n = f(c_n) - f(d_n)$ está acotada inferiormente por ε por lo tanto tiende a ε o algo mayor. Este absurdo proviene de suponer que f no es uniformemente continua, por lo tanto lo es. ∎

4.2. Diferenciabilidad

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P.

   Demo: Sea $P = (x_0, y_0)$. Por definición de diferenciable existen las derivadas parciales en P $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b$ y se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0 \quad (1)$$

   Es claro que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} a(x - x_0) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} b(y - y_0) = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \|(x - x_0, y - y_0)\| = 0 \quad (4)$$

Por ser todos límites convergentes podemos operar con ellos y hacer:

$$\begin{aligned}
(1)(4) + (2) + (3) = 0 \cdot 0 + 0 + 0 &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} \|(x-x_0,y-y_0)\| + a(x-x_0) + b(y-y_0) &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= 0,
\end{aligned}$$

y como $f(x_0,y_0)$ es una constante $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, o sea, f es continua en $(x_0,y_0) = P$, que es lo que queríamos demostrar. ■

2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en U. Probar que f es diferenciable en U.

Demo: Primero notemos que,

$$-1 \le \frac{x-x_0}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}, \frac{y-y_0}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} \le 1. \tag{5}$$

Luego, por definición de derivada en una variable se cumple para todo y_0 que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

y en particular como y no aparece, podemos hacerlo tender también a y_0,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

y por (5) podemos decir que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)}{x-x_0} \frac{x-x_0}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que, usando teorema del valor medio en una variable

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c_{y,y_0})(y-y_0),$$

donde $c_{y,y_0} \in [y,y_0]$. Como f es de clase C^1 $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua y entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(y,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{y,y_0}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$$

porque $c_{y,y_0} \to y_0$ cuando $y \to y_0$. Ahora, de vuelta usando (5) podemos decir que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{y,y_0}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \frac{y-y_0}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{y,y_0})(y-y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0. \qquad (7)\\
& \qquad (8)
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando (6) y (7),

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} + \frac{f(x,y) - f(x,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + f(x,y) - f(x,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0\\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} &= 0
\end{aligned}$$

■

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Probar que existe $f_v(P)$ y es igual a $\bigtriangledown f(P) \cdot v$.

   Demo: Sea $P = (x_0, y_0)$ y $v = (c, d)$. Por definición de diferenciable existen las derivadas parciales en P $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b$ y se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0,$$

   en particular, podemos ver dicho límite por la recta $x(t) = x_0 + tc$, $y(t) = y_0 + td$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tc, y_0+td) - f(x_0,y_0) - a(x_0+tc-x_0) - b(y_0+td-y_0)}{t} &= 0 \\
\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tc, y_0+td) - f(x_0,y_0) - atc - btd}{t} &= 0 \\
\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tc, y_0+td) - f(x_0,y_0)}{t} - (ac+bd) &= 0 \\
f_v(P) &= (a,c)\cdot(b,d) \\
f_v(P) &= \bigtriangledown f(P)\cdot v.
\end{aligned}$$

   ■

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\bigtriangledown f(P) \neq 0$. Probar que la dirección de máximo crecimiento está dada por $\bigtriangledown f(P)$.

   Demo: Queremos hallar un v de norma 1 tal que $f_v(P)$ sea máximo. Sabemos que $f_v(P) = \bigtriangledown f(P) \cdot v = \|v\| \, \|\bigtriangledown f(P)\| \cos(\theta) = \|\bigtriangledown f(P)\| \cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre v y $\bigtriangledown f(P)$. Dado que $\|\bigtriangledown f(P)\|$ es fijo, solo podemos fijar θ tal que $\cos(\theta)$ sea máximo, y esto es así cuando $\theta = 0$ ya que el coseno toma su máximo valor (1). Esto quiere decir que el ángulo entre v, la dirección de máximo crecimiento, y el gradiente es 0, por lo cual ambas apuntan en la misma dirección. ■

5. Teorema del valor medio para funciones diferenciables: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida sobre el abierto U. Sean $P_1, P_2 \in U$ tales que el segmento P_1P_2 esta contenido en U. Existe un punto P tal que

$$f(P_1) - f(P_2) = \bigtriangledown f(P) \cdot (P_1 - P_2).$$

   Demo: Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma(t) = P_2 + t(P_1 - P_2)$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g = f \circ \sigma$. Como f y σ son diferenciables, g también lo es. Por teorema del valor medio existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(1) - g(0) = g'(c)(1 - 0) = g'(c)$.

$$g'(c) = (f\circ\sigma)'(c) = \bigtriangledown f(\sigma(c))\mathbf{D}\sigma(c) = \bigtriangledown f(\sigma(c))(P_1 - P_2)^t = \bigtriangledown f(\sigma(c)) \cdot (P_1 - P_2),$$

   dado que $c \in [0, 1]$ sabemos que $\sigma(c) \in P_1P_2 \subset U$ y por lo tanto tomando $P = \sigma(c) \in U$ queda:

$$g(1) - g(0) = f(P_1) - f(P_2) = \bigtriangledown f(P) \cdot (P_1 - P_2),$$

   que es lo que queríamos demostrar. ■

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y P un extremo de f. Probar que $\bigtriangledown f(P) = 0$.

   Demo: Sea $(x_0, y_0) = P$. Supongamos que $\bigtriangledown f(P) \neq 0$. Esto implica $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ (la demostración en el otro caso es análoga). Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x, y_0)$. Como g es composición de diferenciables, es diferenciable (derivable). Es claro que $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ y por lo tanto x_0 no es extremo de g. Esto quiere decir que hay valores x_1 tan cercanos a x_0 como se quiera tal que $g(x_0) < g(x_1)$ y lo mismo para $g(x_0) > g(x_1)$. Podemos entonces construir el punto (x_1, y_0) tan cerca como se quiera de (x_0, y_0) tal que $f(x_1, y_0) = g(x_1) < g(x_0) = f(x_0, y_0)$ o que $f(x_1, y_0) = g(x_1) > g(x_0) = f(x_0, y_0)$, con lo cual $(x_0, y_0) = P$ no es extremo de P. Por contrarecíproco, si P es extremo de f, $\bigtriangledown f(P) = 0$. ■

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 y P un punto crítico de f. Probar que:

   - si el hessiano de f en P es definido positivo, entonces P es un mínimo relativo estricto de f.
   - si el hessiano de f en P es definido negativo, entonces P es un máximo relativo estricto de f.

- si el hessiano de f en P es indefinido (o sea, no es definido positivo ni negativo), entonces P es un punto silla de f.

Demo: Reescribamos f como su polinomio de taylor de orden 2 centrado en P mas el resto de lagrange (el término lineal no aparece ya que P es punto crítico de f y por lo tanto su gradiente es nulo) [1]:

$$\begin{aligned} f(Q) &= f(P) + \frac{1}{2}(Q-P)^t(\mathbf{H}f)(Q-P) + && (9)\\ & \frac{1}{6}\sum_{u,v,w\in\{x,y\}}(Q_u-P_u)(Q_v-P_v)(Q_w-P_w)\frac{\partial^3 f}{\partial u\partial v\partial w}(\xi_{u,v,w}). && (10)\end{aligned}$$

La función definida por $g(v) = v^t(\mathbf{H}f)v$ para los v de norma 1 es una función continua sobre un compacto y por lo tanto alcanza un mínimo m y un máximo M. Si $\mathbf{H}f$ es definida positiva será $0 < m \leq M$, si es definida negativa será $m \leq M < 0$ y si es indefinida será $m \leq 0 \leq M$. Si utilizamos vectores de norma distinto de 1 se mantienen dichos límites multiplicados por la norma del vector al cuadrado (ya que la función g es bilineal).

Acotemos entonces con esto la expresión resulta:

$$\begin{aligned} f(Q) &\geq f(P) + \|(Q-P)\|^2\frac{m}{2} + \frac{1}{6}\sum_{u,v,w\in\{x,y\}}(Q_u-P_u)(Q_v-P_v)(Q_w-P_w)\frac{\partial^3 f}{\partial u\partial v\partial w}(\xi_{u,v,w}) && (11)\\ f(Q) &\leq f(P) + \|(Q-P)\|^2\frac{M}{2} + \frac{1}{6}\sum_{u,v,w\in\{x,y\}}(Q_u-P_u)(Q_v-P_v)(Q_w-P_w)\frac{\partial^3 f}{\partial u\partial v\partial w}(\xi_{u,v,w}) && (12)\end{aligned}$$

Ahora, el valor de las terceras derivadas parciales, para los Q cercanos a P es acotable por una constante, y si acotamos $(Q_u - P_u)(Q_v - P_v)(Q_w - P_w)$ por la norma al cubo (siempre en valor absoluto), obtenemos:

$$\begin{aligned} f(Q) &\geq f(P) + \|(Q-P)\|^2\frac{m}{2} - K\|(Q-P)\|^3 && (13)\\ f(Q) &\leq f(P) + \|(Q-P)\|^2\frac{M}{2} + K\|(Q-P)\|^3 && (14)\\ & && (15)\end{aligned}$$

Con lo cual, asumiendo $\text{mín}(m, M) \neq 0$ y tomando Q suficientemente cerca de P tal que $0 < \|(Q-P)\| < \frac{\text{mín}(|m|,|M|)}{2K}$, vemos que:

- Si el hessiano es definido positivo, usando 13 queda $f(Q)$ mayor o igual a $f(P)$ mas algo positivo para un entorno de P, o sea P es mínimo local.
- Si el hessiano es definido negativo, usando 14 análogamente, P es máximo local.
- Si el hessiano es indefinido y $m < 0$ y $M > 0$ utilizando Q suficientemente cerca de P y en la dirección que da el mínimo m, vemos que $f(P) > f(Q)$, y análogamente en la dirección que da el máximo M $f(P) < f(Q)$, con lo cual P no es máximo ni mínimo local, con lo cual es punto silla. Si $m = 0/M = 0$ puede pasar cualquier cosa (depende del resto, del que no sabemos nada) con el máximo/mínimo.

■

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ y $P \in S$. Si P es extremo de f restringido a S y $\triangledown g(P) \neq 0$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\triangledown f(P) = \lambda \triangledown g(P)$.

   Demo: Sea $P = (x, y)$. Por teorema de la función implícita (aplica porque $\triangledown g(P) \neq 0$) existe una función h tal que en una vecindad de P se cumple $g(x, h(x)) = 0$. Podemos ver entonces que en dicha vecindad $\triangledown g = 0$ lo que implica, por regla de la cadena,

$$\triangledown g(x, h(x))(x, h(x)) = \triangledown g(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0.$$

[1] para la expresión del resto usamos un abuso de notación, con la idea de hacer mas concisa la demostración, P_u denota el valor de la coordenada u en el punto P.

Ahora lo que queremos es un extremo de $f(x, h(x))$ sin ninguna restricción (ya que el punto $(x, h(x))$ siempre pertence a S). Para esto tomamos el gradiente igual a 0: $\bigtriangledown f(x, h(x))(x, h(x)) = \bigtriangledown f(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0$. Dado que $\bigtriangledown g(x, h(x))$ y $\bigtriangledown f(x, h(x))$ son ambos perpendiculares al vector $(1, h'(x))$ (su producto interno da 0), deben ser paralelos entre sí, por lo cual existe λ tal que $\bigtriangledown f(x, h(x)) = \lambda \bigtriangledown g(x, h(x))$ y como $P \in S \Rightarrow y = h(x) \Rightarrow P = (x, h(x))$ queda demostrado el teorema. ■

4.3. Integración

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es integrable sobre $[a, b]$.

   Demo: Recordando la definición de integral (Definición 17) queremos ver que

   $$\text{ínf}(\{\sum_{c\in C} |c|M_c\}) \text{ y } \sup(\{\sum_{c\in C} |c|m_c\})$$

   coinciden, donde C es una partición en intervalos de $[a, b]$, M_c es el supremo de la imagen de f sobre c y m_c es su ínfimo. Dado que f es continua sobre un compacto, es acotada y por lo tanto M_c y m_c están definidas para todo c. Es claro que todos los elementos del conjunto de sumas superiores son mayores o iguales a todos los del conjunto de sumas inferiores, ya que dadas una partición de cada conjunto, tomando un refinamiento común es claro que la que usa supremos es mayor o igual. Ahora, veamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una suma superior y una inferior que estan a lo sumo a ε de distancia. Como f es continua sobre un compacto, es uniformemente continua, y por lo tanto para cualquier $\varepsilon' > 0$ existe δ tal que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon'$. Sea tal δ para $\varepsilon' = \varepsilon/(b - a)$. Tomemos la partición C de $[a, b]$ tal que,

   $$C = \left\{[a + i\frac{\delta}{2}, a + (i+1)\frac{\delta}{2}) \;|i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le \left\lfloor 2\frac{b-a}{\delta}\right\rfloor\right\} \cup \left\{[a + \frac{\delta}{2}\left\lfloor 2\frac{b-a}{\delta}\right\rfloor, b]\right\}$$

   Ahora, cualquier par de reales en esos intervalos estan a distancia menor o igual a $\delta/2 < \delta$, por lo cual el máximo y el mínimo de cada intervalo estan a distancia menor a ε'. Tomemos la diferencia entre la suma superior y la suma inferior sobre C,

   $$\sum_{c\in C}(M_c - m_c)|c| < \sum_{c\in C} \varepsilon'|c| = \varepsilon' \sum_{c\in C} |c| = \varepsilon'(b - a) = \varepsilon.$$

   De esta manera vemos que la diferencia entre el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las superiores no puede ser ningún $\varepsilon > 0$, por lo tanto es 0. ■

2. Teorema fundamental del cálculo. Si f es continua en $[a, b]$, $x \in [a, b]$,

   $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

   Demo: Por definición de derivada

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

   Sea M_h el máximo para f en $[x, x + h]$ (existe porque $[x, x + h]$ es un compacto) y m_h el mínimo (ídem). Ahora podemos acotar el límite como

   $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{m_h h}{h} &\le \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} &\le \lim_{h\to 0} \frac{M_h h}{h} \\ \lim_{h\to 0} m_h &\le \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} &\le \lim_{h\to 0} M_h \end{aligned}$$

   y como

   $$\lim_{h\to 0} M_h = \lim_{h\to 0} m_h = f(x),$$

   queda demostrado. ■

3. Teorema del valor medio para integrales doles: Sea $P \in \mathbb{R}^2$. Si f es continua en $B(\bar{P}, r)$ entonces existe $Q \in B(\bar{P}, r)$ tal que,

$$\frac{1}{\text{Área}(B(P,r))} \iint_{B(P,r)} f(x,y)\ dA = f(Q).$$

Demo: Como f es una función continua en el compacto $B(\bar{P}, r)$, alcanza su máximo $f(M)$ en algún punto M y su mínimo $f(N)$ en algún punto N. De esta manera podemos acotar la integral de f sobre $B(P, r)$ haciendo

$$\begin{array}{rcccl}
\displaystyle\iint_{B(P,r)} f(N)\ dA & \leq & \displaystyle\iint_{B(P,r)} f(x,y)\ dA & \leq & \displaystyle\iint_{B(P,r)} f(M)\ dA \\
f(N)\displaystyle\iint_{B(P,r)} 1\ dA & \leq & \displaystyle\iint_{B(P,r)} f(x,y)\ dA & \leq & f(M)\displaystyle\iint_{B(P,r)} 1\ dA \\
f(N)\text{Área}(B(P,r)) & \leq & \displaystyle\iint_{B(P,r)} f(x,y)\ dA & \leq & f(M)\text{Área}(B(P,r)) \\
f(N) & \leq & \displaystyle\frac{1}{\text{Área}(B(P,r))}\iint_{B(P,r)} f(x,y)\ dA & \leq & f(M)
\end{array}$$

notando en el último paso que el área es siempre positiva. Dado que f es continua podemos definir su restriccion g al segmento MN de forma continua y por Bolsano existe en dicho segmento un punto Q tal que $f(Q)$ es exactamente lo que queríamos demostrar. ■