

ÁLGEBRA 1 - SEGUNDO PARCIAL - Tema C
7 DE JULIO DE 2023

APELLIDOS:
NOMBRES:

NÚMERO DE LIBRETA
ó DNI:

TURNO: MAÑANA (PRACT 2)
CARRERA: LIC. CS. COMPUTACIÓN

1	2	3	4	Nota
B	B	B/8	B	10 (diez)

Usar hojas distintas para ejercicios distintos. Exhibir todos los cálculos.
Justificar todas las respuestas. Escribir con tinta y con letra clara y legible.

No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen simultáneamente
 $455a + 595b = 35$ y $(a + 2b)^{2022} \equiv 510 \pmod{11}$.

Ejercicio 2. Sea $w = e^{\frac{2}{85}\pi i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$w^{7n+164} = \sum_{k=40}^{890} w^k$$

Ejercicio 3. a) Hallar todos los posibles $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tales que el polinomio

$$f = X^6 - 4X^5 - 6X^4 + 16X^3 + 20X^2 + 48X + c$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$.

b) Para cada valor de c hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

Ejercicio 4. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(n^{177} + 3n + 42 : 207) = 69.$$

Expresar las soluciones mediante una única ecuación.

1) Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplan simultáneamente:

$$(a) \quad 455a + 595b = 35$$

$$(b) \quad (a + 2b)^{2022} \equiv 510 \pmod{11}$$

(a) Resuelve la ecuación lineal:

• Coprimiza, dividiendo todo por 35

$$\Rightarrow 13a + 17b = 1 \quad \checkmark$$

• Busca una solución particular:

Notó que $a = 4$ y $b = -3$ cumple \checkmark

• Busca la solución del sistema homogéneo asociado:

$$13a + 17b = 0$$

Claramente las soluciones serán de la forma:

$$a = 17K \quad \text{y} \quad b = -13K \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

• Luego sumo las soluciones del sistema homogéneo asociado con la particular

$$\Rightarrow a = 17K + 4 \quad \text{y} \quad b = -13K - 3 \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

(b) Reemplazamos a y b por los valores encontrados en (a) y buscamos los K que cumplen (b)

$$[17K+4+2 \cdot (-13K-3)] \equiv 5 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow (-9K-2) \equiv 4 \pmod{11}$$

Nota que si $11 \mid -9K-2 \Rightarrow$ no sería congruente a 4 mod 11. Por lo que $11 \nmid -9K-2$. ✓

Esto de luego a parte utilizamos el PTF que pide en este caso particular que $(-9K-2) \equiv 1 \pmod{11}$. ✓

$$\Rightarrow [(-9K-2)]^2 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (-9K-2)^2 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow (-9K)^2 + 2 \cdot (-9K) \cdot (-2) + (-2)^2 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 81K^2 + 36K + 4 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 4K^2 + 3K \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow K \cdot (4K+3) \equiv 0 \pmod{11} \quad \checkmark$$

Por 11 es primo, por lo que

$$K \cdot (4K + 3) \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow K \equiv 0 \pmod{11} \vee 4K + 3 \equiv 0 \pmod{11} \checkmark$$

• $K \equiv 0 \pmod{11}$ ✓

• $4K + 3 \equiv 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 4K \equiv 8 \pmod{11}$ multiplicamos a ambos lados por 3

$\Leftrightarrow 12K \equiv 24 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow K \equiv 2 \pmod{11}$ ✓

Por lo que tengo 2 posibles valores por K

o bien $K \equiv 0 \pmod{11}$ o bien $K \equiv 2 \pmod{11}$

• Reemplazo en los valores de a y lo encuentro entre

• $K \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow K = 117$

$$a = 17 \cdot (117) + 4$$

$$b = -13 \cdot (117) - 3$$

$$a = 1877 + 4$$

$$b = -1437 - 3$$

luego:

B.M

$$\bullet K \equiv 2 \pmod{11} \rightarrow K = 11z + 2$$

$$\Rightarrow a = 77 \cdot (11z + 2) + 4$$

$$a = 187z + 38$$

$$b = -13 \cdot (11z + 2) - 3$$

$$b = -143z - 29$$

En conclusión, los posibles pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen son:

$$\bullet \bullet \text{ 6 pares: } (187z + 4; -143z - 3)$$

$$\bullet \text{ 6 pares } (187z + 38; -143z - 29)$$

Con $z \in \mathbb{Z}$

$\left. \begin{array}{l} \text{TA} \\ \text{R} \end{array} \right\}$

2) Sea $w = e^{\frac{2\pi i}{95}}$. Hallar todo $m \in \mathbb{N}$

$$w^{7m+164} = \sum_{k=40}^{890} w^k$$

↑
análisis este primer sumando

$$\bullet \sum_{k=40}^{890} w^k =$$

geométrico

$$= \sum_{k=0}^{890} w^k - \sum_{k=0}^{39} w^k = \frac{w^{891} - 1}{w - 1} - \frac{w^{40} - 1}{w - 1}$$

$$= \frac{w^{891} - w^{40}}{w - 1}$$

$$\Rightarrow w^{7m+164} = \frac{w^{891} - w^{40}}{w - 1}$$

↓ multiplico por $w-1$ ambos lados

$$w^{7m+164} - w^{7m+164} = w^{891} - w^{40}$$

$$w^{40} \cdot (w^{7m+125} - w^{7m+124}) = w^{40} \cdot (w^{851} - 1)$$

↓ divido por w^{40} ambos lados

$$w^{7m+125} - w^{7m+124} = w^{851} - 1$$

Delvicio a que $W = e^{\frac{2}{85}\pi i}$ Por De moinre, $W = 1$ * 85
 (porque el $arg = 2\pi$)

$$\Rightarrow W^{7m} \cdot W^{95} \cdot W^{40} - W^{7m} \cdot W^{85} \cdot W^{39} = (W^{95})^{10} \cdot W - 1$$

$$\Leftrightarrow W^{7m} \cdot W^{40} - W^{7m} \cdot W^{39} = W - 1$$

$$\Leftrightarrow W^{7m+39} \cdot (W-1) = W-1 \quad \text{divido } W-1 \text{ de ambos lados}$$

$$\Leftrightarrow W^{7m+39} = 1$$

Por lo dicho en * [no solo por esto, sino por quicn es w]

$$7m+39 \equiv 0 \pmod{85}$$

Condicion de
 TCR

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7m+39 \equiv 0 \pmod{17} \\ 7m+39 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7m+5 \equiv 0 \pmod{17} \\ 2m+4 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7m \equiv 12 \pmod{17} & \text{multiplica por 5 ambos lados} \\ 2m \equiv 1 \pmod{5} & \text{multiplica por 3 ambos lados} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35m \equiv 60 \pmod{17} \\ 6m \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \equiv 9 \pmod{17} \\ m \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \equiv 9 \pmod{17} \text{ (1)} \\ m \equiv 3 \pmod{5} \text{ (2)} \end{cases} \text{ Tiene solución por TCR}$$

Por (1) $m = 17K + 9$

Lo reemplazo en (2) para hallar los K

$$17K + 9 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\Leftrightarrow 2K \equiv 4 \pmod{5} \text{ multiplicar por 3 ambos lados}$$

$$\Leftrightarrow 6K \equiv 12 \pmod{5}$$

$$\Leftrightarrow K \equiv 2 \pmod{5}$$

Reemplazo en (1) $m = 17 \cdot (5K + 2) + 9$

$$m = 85K + 43$$

$\Rightarrow R^{TA}$: Cumplen aquellas

$$m \equiv 43 \pmod{85} \quad \checkmark$$

3) a) Hallar todos los posibles $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Tales que el polinomio:

$$f = X^6 - 4X^5 - 6X^4 + 16X^3 + 20X^2 + 48X + c$$

Tenga una raíz de argumento: $\frac{3\pi}{2}$

Si existe una raíz de arg: $\frac{3\pi}{2}$, sea de la forma:

$$|z| \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i} = |z| \cdot (0 + (-1)i) = -|z|i$$

~~Evalúo f en dicha raíz:~~

Busco $|z|$ por
luego hallo c

~~$$f(-|z|i) = (-|z|i)^6 - 4(-|z|i)^5 - 6(-|z|i)^4 + 16(-|z|i)^3 + 20(-|z|i)^2 + 48(-|z|i) + c$$~~

$\Rightarrow |z|i$ también es raíz, evalúo f en $|z|i$
por tener los coeficientes en \mathbb{R}

$$\begin{aligned} f(|z|i) &= (|z|i)^6 - 4(|z|i)^5 - 6(|z|i)^4 + 16(|z|i)^3 + 20(|z|i)^2 + 48(|z|i) + c \\ &= -|z|^6 - 4|z|^5i - 6|z|^4 - 16|z|^3i - 20|z|^2 + 48|z|i + c \end{aligned}$$

Se fue en 0 y que $c \in \mathbb{R}$, entonces lo expresado anteriormente $\in \mathbb{R}$ (sin contar c claramente).

~~La parte de parte real como imaginaria por separado debe~~

\Rightarrow la parte imaginaria debe ser 0, ya que $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
por sí sola

$$-4|z|^5 - 16|z|^3 + 45|z| = 0$$

$$-4|z|(|z|^4 + 4|z|^2 - 12) = 0$$

$|z|$ no puede ser 0 porque sino, no habria raiz.

$$\Rightarrow (|z|^4 + 4|z|^2 - 12) = 0 \quad \text{y obviamente } |z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Recordar: $|z|^2 = X$

$$\Rightarrow X^2 + 4X - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} X=2 \\ X=-6 \end{cases}$$

Vuelvo a $X = |z|^2$

$$\Rightarrow |z|^2 = 2 \quad \vee \quad |z|^2 = -6$$

Puede ser

$$|z| = \sqrt{2} \quad \vee \quad |z| = -\sqrt{2}$$

< 0 , no lo tengo en cuenta

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

Por lo tanto dige entre \mathbb{N} $|z| = i$ es raiz $\Leftrightarrow -|z| = i$ es raiz

$$\Rightarrow \sqrt{2}i \text{ es raiz } \vee -\sqrt{2}i \text{ es raiz} \quad \checkmark$$

~~17/11/2020~~ Una vez hallados $|Z|$, Hallar "c"

$$\Rightarrow (x - \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2}i) \mid f$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \mid f$$

Ver el valor de C por el cual $x^2 + 2 \mid f$

$$\begin{array}{r}
 x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 48x + C \\
 \underline{- (x^6 + 2x^4)} \\
 0 - 4x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 48x + C \\
 \underline{- (-4x^5 - 8x^3)} \\
 0 - 8x^4 + 24x^3 + 20x^2 + 48x + C \\
 \underline{- (-8x^4 - 16x^2)} \\
 0 24x^3 + 36x^2 + 48x + C \\
 \underline{- (24x^3 + 48x)} \\
 0 36x^2 + C \\
 \underline{- (36x^2 + 72)} \\
 0 C - 72
 \end{array}$$

$R^{\Gamma A}$ de a)

$$\Rightarrow C - 72 = 0 \Leftrightarrow C = 72$$

B

a) Por los valores de c hallados, factorizar f en $\mathbb{Q}(x), \mathbb{R}(x),$

$\mathbb{C}(x)$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

$$c = 72$$

Por (a) sé que $-\sqrt{2}i$ y $\sqrt{2}i$ son raíces.

Primeros derivos y veo si $-\sqrt{2}i$ y $\sqrt{2}i$ siguen siendo raíces.

$$f' = 6x^5 - 20x^4 - 24x^3 + 48x^2 + 40x + 48$$

~~Evalúo~~ Evalúo y no son. Comienza directamente

dividir a f por $(x - \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2}i)$ pero por los ejercicios en (a), queda:

$$f = (x^2 + 2) \cdot \overbrace{(x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 24x + 36)}^{g \leftarrow \text{lo llamamos } g}$$

¡a g ! hay al menos 1 raíz doble, por lo que derivamos a esto que llamaremos: g

$$g' = 4x^3 - 12x^2 - 16x + 24$$

$$4 \cdot (x^3 - 3x^2 - 4x + 6)$$

Use lema de Gauss a ver si encuentro una raíz. Pruebo con $\{\pm 6, \pm 2, \pm 3, \pm 1\}$

$$g'(1) = 0$$

Es esa la raíz doble que buscamos? lo evaluo en g

$$g(1) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{NO}}$$

Como $g(1) \neq 0 \Rightarrow 1$ no es raíz

\Rightarrow Para $(x-1) \mid g'$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & & 1 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow g' = 4 \cdot (x-1) \cdot (x^2 - 2x - 6)$$

Deber estar a 6 esa raíz que es doble,
no lo resolviente

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{7}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{7}$$

Evaluar en g

$$g(1 + \sqrt{7}) = 0$$

Bueno, pues si $1 + \sqrt{7}$ es raíz doble, su conjugado también lo es $\Rightarrow 1 + \sqrt{7}$ y $1 - \sqrt{7}$ son raíces dobles.

B.V.

$$\Rightarrow f = (X^2 + 2) \cdot (X - (1 + \sqrt{7}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{7}))^2$$

• Factorización en $\mathbb{C}[X]$

$$f = (X - \sqrt{2}i) \cdot (X + \sqrt{2}i) \cdot (X - (1 + \sqrt{7}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{7}))^2 \quad \curvearrowright \mathbb{R}^{\text{TA}}$$

Todos de grado 1, entonces es irreducible. ✓

• Factorización en $\mathbb{R}[X]$

$$f = (X^2 + 2) \cdot (X - (1 + \sqrt{7}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{7}))^2 \quad \curvearrowright \mathbb{R}^{\text{TA}}$$

Tiene discriminante $\Delta < 0$

~~Resol~~
Grado 1 ✓

• Factorización en $\mathbb{Q}[X]$:

$$\begin{aligned} \text{Primero notamos: } (X - (1 + \sqrt{7}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{7}))^2 &= \left((X - (1 + \sqrt{7})) \cdot (X - (1 - \sqrt{7})) \right)^2 \\ &= (X^2 - 2X - 6)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = (X^2 + 2) \cdot (X^2 - 2X - 6)^2 \quad \curvearrowright \mathbb{R}^{\text{TA}} \quad \checkmark$$

↑
No tiene raíces en $\mathbb{Q}(x)$

↑
No tiene raíces en $\mathbb{Q}(x)$

4) Determinar todos los $m \in \mathbb{Z}$ /

$$(m^{177} + 3m + 42 : 207) = 69$$

Expresa mediante una única ecuación

Nota que $69 = 23 \cdot 3$

y que $207 = 23 \cdot 3^2$

Por lo que: $23 \mid m^{177} + 3m + 42$, $3 \mid m^{177} + 3m + 42$, y $9 \nmid m^{177} + 3m + 42$

• Análisis mod 23

$$m^{177} + 3m + 42 \equiv 0 \pmod{23}$$

$$\Leftrightarrow m^{177} + 3m + 19 \equiv 0 \pmod{23}$$

Nota que si $23 \mid m \Rightarrow$ la expresión $m^a \equiv 0 \pmod{23}$, por lo que $23 \nmid m$. Puede utilizarse PTF, $m^{22} \equiv 1 \pmod{23}$ ✓

$$\Rightarrow (m^{22})^8 \cdot m + 3m + 19 \equiv 0 \pmod{23}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot m + 3m + 19 \equiv 0 \pmod{23}$$

$$\Leftrightarrow 4m \equiv -19 \pmod{23}$$

$$\Leftrightarrow 4m \equiv 4 \pmod{23} \quad \checkmark$$

y multiplica a ambos lados por 6

$m \equiv 0 (9)$

$m^3 + 3m + 42 \equiv ? (9)$

$0^3 + 3 \cdot 0 + 42 \equiv 6 (9) \leftarrow \text{Bien (no es 0)}$

$m \equiv 3 (9)$

para
 $3^2 = 9$

$3^3 + 3 \cdot 3 + 42 \equiv ? (9)$

$0 + 0 + 6 \equiv 6 (9) \leftarrow \text{no es 0}$

$m \equiv 6 (9)$

para
 $6^2 = 36$

$6^3 + 18 + 42 \equiv ? (9)$

$0 + 0 + 6 \equiv 6 (9) \leftarrow \text{no es 0}$

Bien, todo bien \Rightarrow quedan 3 sistemas de ecuaciones

$\begin{cases} m \equiv 1 (23) \\ m \equiv 0 (9) \end{cases}$

①

$\begin{cases} m \equiv 1 (23) \\ m \equiv 3 (9) \end{cases}$

②

$\begin{cases} m \equiv 1 (23) \\ m \equiv 6 (9) \end{cases}$

③

Todo esto es como decir

- $n \equiv 1 (23)$
- $n \equiv 0 (3)$

① Como $9 \perp 23$, por TCR hay solución. Como $M = 23K + 1$, lo reemplazo en la 2^{da} ecuación

$$23K + 1 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow 5K \equiv 8 \pmod{9} \text{ multiplico por 2}$$

$$\Rightarrow 10K \equiv 16 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow K \equiv 7 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow M = 23 \cdot (9\# + 7) + 1$$

$$\Rightarrow M = 207\# + 162$$

② Por el mismo argumento que en ①, por TCR vale.

$M = 23K + 1$, lo reemplazo en la 2^{da} ecuación

$$23K + 1 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow 5K \equiv 2 \pmod{9} \text{ multiplico por 2 a ambos lados}$$

$$\Rightarrow 10K \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow K \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow M = 23 \cdot (9\# + 4) + 1$$

$$\Rightarrow M = 207\# + 93$$

③ Por el mismo argumento que ①, por TCR, vale que:

$M = 23K + 1$. Lo reemplazo en la 2^{da} ecuación:

$$23K + 1 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\Leftrightarrow 5K \equiv 5 \pmod{9} \text{ (multiplico por 20 ambas lados)}$$

$$\Leftrightarrow 10K \equiv 10 \pmod{9}$$

$$\Leftrightarrow K \equiv 1 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow M = 23 \cdot (97 + 1) + 1$$

$$M \equiv 2077 + 24$$

Entonces, los 3 sistemas quedan de la forma:

$$\textcircled{1} \quad M \equiv 162 \pmod{207} \quad \textcircled{2} \quad M \equiv 93 \pmod{207} \quad \textcircled{3} \quad M \equiv 24 \pmod{207}$$

Pero como fue estos 3 sistemas los puedo expresar en uno solo, ya que $207 : 3 = 69$. ~~2/3/1~~

$\exists M \equiv 24 \pmod{69}$ cumple los 3, y lo expreso en uno solo

R^{TA} : $M \equiv 24 \pmod{69}$ Donde M fue cualquier