1/5

1	2	3	4	5
B	B	B	M	B

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]
LIBRETA: [redacted] TURNO: $\boxed{\text{9 a 12}}$ $\boxed{\text{15 a 18}}$ $\boxed{\text{17 a 20}}$ TEMA 1

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
2do Parcial (29/11/2013)

---

1. Determinar todos los $y \in \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ para los cuales existe $x \equiv 4 \pmod 5$ tal que
$$6x + 21y = 15.$$

---

2. (a) Resolver en $\mathbb{Z}$ cada una de las ecuaciones de congruencia siguientes:
$$10^{49}X \equiv 17 \pmod{13} \quad \text{y} \quad 5X \equiv 7 \pmod 9.$$
(b) Resolver en $\mathbb{Z}$ el sistema lineal de ecuaciones de congruencia
$$\begin{cases} 10^{49}X & \equiv 17 \pmod{39} \\ 5X & \equiv 7 \pmod 9 \end{cases}$$

---

3. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio
$$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$
Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

---

4. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

---

5. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que
$$\begin{cases} w^{15n} & = w^5 \\ w^{14n} & = w^{21} \end{cases}$$

$\boxed{\text{JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS}}$

HOJA 1

① Resuelvo la ecuación diofántica $6x+21y=15$.

$(6:21)=3$ y $3 \mid 15 \Rightarrow \exists$ solución ✓

$2x+7y=5$.

encuentro una solución particular.

el par $(x_0,y_0)=(-1,1)$ sirve. ✓

encuentro las soluciones del homogéneo

$2x+7y=0 \Rightarrow 2x=-7y$

como $(2:7)=1$ $7 \mid x$, $x=7k$ y $2 \mid y$, $y=2q$.

$2.7k=-7.2q. \Rightarrow \boxed{k=-q}$ ✓

las soluciones del homogéneo tienen la forma $(x,y)=(-7q,2q)$ ✓

todas las soluciones son $(x,y)=(-7q-1,2q+1)$ ✓ $q\in\mathbb{Z}$

veo para que valores de q, $x\equiv 4(5)$.

$-7q-1\equiv 4(5)$.

$3q\equiv 0(5)$.

$9q\equiv 0(5)$?

$q\equiv 0(5)$ ✓ entonces $q=5t$. $t\in\mathbb{Z}$

reemplazo este valor en la ecuación original.

$6(-7.5t-1)+21(2.5t+1)=15$.

$-\cancel{210t}-6+\cancel{210t}+21=15$

~~Luego para cualquier~~ $\cancel{y\in\{1,2,\dots,99,100\}}$

~~existe~~ $\cancel{x\equiv 4(5)}$ ~~tq~~ $\cancel{6x+21y=15}$

siempre va a haber un $x\equiv 4(5)$ (no importa lo que valga t) que cumpla la

ecuación, pero $0\le y\le 100$, entonces acoto →

$$1 \leq \overbrace{10t+1}^{y} \leq 100$$

$$0 \leq 10t \leq 99$$

$$0 \leq t \leq 9{,}9$$

$$0 \leq t \leq 9 \quad \text{pues } t \in \mathbb{Z}$$

✓

$$y = 10t + 1$$

$$\boxed{\text{Los } y \text{ que cumplen son } y \in \{1, 21, 11, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}}$$

MESA 2

2) a) $10^{49} x \equiv 17 \ (13)$.

como $(10:13)=1$, por Fermat $10^{12} \equiv 1 \ (13)$.

$49 = 12.4 + 1$

$\underbrace{(10^{12})^4}_{\equiv 1 (13)} . 10x \equiv 17 \ (13)$.

$10x \equiv 4 \ (13)$.

$-3x \equiv 4 \ (13)$

$-3.4x \equiv 16 \ (13)$.

$x \equiv 3 \ (13)$.

multiplicar por 4 es un si y solo si pues $(4:13)=1$ (ojo!)

$10^{49} x \equiv 17 \ (13)$ si y solo si $x \equiv 3 \ (13)$.

$5x \equiv 7 \ (9)$

$10x \equiv 14 \ (9)$

$x \equiv 5 \ (9)$.

mult. por 2 es un si y solo si pues $(2:9)=1$.

$5x \equiv 7 \ (9)$ si y solo si $x \equiv 5 \ (9)$

b) $\begin{cases} 10^{49} x \equiv 17 \ (39) \\ 5x \equiv 7 \ (9). \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 10^{49} x \equiv 17 \ (13) \ (*) \\ 10^{49} x \equiv 17 \ (3) \\ 5x \equiv 7 \ (9). \end{cases}$

resuelvo $10^{49} x \equiv 17 \ (3)$.

(más fácil, $10 \equiv 1 \ (3)$)

como $(10:3)=1$, por Fermat $10^2 \equiv 1 \ (3)$.

$49 = 2.24 + 1$

$(10^2)^{24} . 10x \equiv 17 (3)$.

$x \equiv 17 (3)$.

$\boxed{x \equiv 2 \ (3)}$.

para que se cumpla este sistema. (*)

$\begin{cases} x \equiv 3 \ (13). \\ x \equiv 2 \ (3) \\ x \equiv 5 \ (9). \end{cases}$ $x = 9k + 5$.

entonces si $x \equiv 5 (9)$

resuelvo este sistema con TCR. (saco $x \equiv 2\,(3)$ porque ya está indicado)

que garantiza único sol. mod 117.

$$\begin{cases} x \equiv 3\ (13) \implies x = 13q + 3 \\ x \equiv 5\ (9) \end{cases}$$

$(2:9)=1$

$$13q + 3 \equiv 5\ (9) \iff 4q \equiv 2\ (9) \iff 8q \equiv 4\ (9)$$

(necesita $\iff$)

$$-q \equiv 4\ (9) \iff q \equiv 5\ (9)$$

$$x = 13(9k+5) + 3 = 117k + 68.$$

Luego las soluciones de ese sistema (el original) $\boxed{x \equiv 68\ (117)}$

③ $f = ax^5 + 8x^4 - 26x^3 + 44x^2 - 40x - (32a + 16)$

si 2 es raíz múltiple del polinomio entonces

$f(2) = 0 \ , \ f'(2) = 0 \ldots$

$f(2) = \cancel{32a} + 128 - 208 + 176 - 80 - \cancel{32a} - 16 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$

$f' = 5ax^4 + 32x^3 - 78x^2 + 88x - 40$

$f'(2) = 80a + 256 - 312 + 176 - 40 = 80a + 80 = 0$

$\boxed{a = -1}$

el polinomio queda

$f = -x^5 + 8x^4 - 26x^3 + 44x^2 - 40x + 16.$

sé que 2 es raíz múltiple, entonces $(x-2)^2 \mid f$

$$
\begin{array}{rl}
-x^5 + 8x^4 - 26x^3 + 44x^2 - 40x + 16 & \underline{\lfloor x^2 - 4x + 4} \\
- \ \underline{-x^5 + 4x^4 - 4x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & -x^3 + 4x^2 - 6x + 4 \\
4x^4 - 22x^3 + 44x^2 - 40x + 16 & \\
- \ \underline{4x^4 - 16x^3 \quad 16x^2} \qquad\qquad & \\
-6x^3 + 28x^2 - 40x + 16 & \\
- \ \underline{-6x^3 \quad 24x^2 - 24x} \qquad & \\
4x^2 - 16x + 16 & \\
- \ \underline{4x^2 - 16x \quad 16} & \\
0 &
\end{array}
$$

$f = (x-2)^2 (-x^3 + 4x^2 - 6x + 4)$

le encuentro las raíces a $-x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = f_1$

Puedo usar Gauss ya que pertenece a $\mathbb{Z}[x]$

$f_1(2) = -8 + 16 - 12 + 4 = 0$

entonces $x - 2 \mid f_1$

$$
\begin{array}{l|l}
-x^3+4x^2-6x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\ \ -x^3+2x^2 & -x^2+2x-2 \\ \hline
\qquad 2x^2-6x+4 & \\
\qquad - \ 2x^2-4x & \\ \hline
\qquad\qquad -2x+4 & \\
\qquad\qquad -2x\ \ 4 & \\ \hline
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$f = (x-2)^3(-x^2+2x-2)$

encuentro las raíces de $-x^2+2x-2$.

$\Delta^2 = 4-4\cdot(-2)(-1) = -4$.

$\Delta \to 2i$
$\quad \to -2i$.

raíces $\dfrac{-2+2i}{-2} = 1-i$

$\dfrac{-2-2i}{-2} = 1+i$.

- factorización en $\mathbb{Q}[x]$.

$f = -(x-2)^3(x^2-2x+2)$ por ser polinomios de grado 1 o de grado 2 sin raíces racionales.

- factorización en $\mathbb{R}[x]$

$f = -(x-2)^3(x^2-2x+2)$ por ser polinomios de grado 1 o de grado 2 sin raíces reales.

- factorización en $\mathbb{C}[x]$

$f = (x-2)^3(x-1+i)(x-1-i)$ por ser polinomios de grado 1.

5/5

(5) $\omega \in G_{35}^{*} \Rightarrow \omega^{35} = 1$.

pues ω es raíz primitiva.

$$15n \equiv 5\ (35) \leadsto \begin{cases} 15n \equiv 5\ (7) \\ 15n \equiv 5\ (5) \rightarrow \text{se cumple para todo } n \in \end{cases}$$

si el exponente es congruente a 5 módulo 35 generan la misma raíz y entonces son iguales.

$$15n \equiv 5\ (7) \Rightarrow \boxed{n \equiv 5\ (7)}$$ ✓

$$14n \equiv 21\ (35) \leadsto \begin{cases} 14n \equiv 21\ (7) \rightarrow \text{se cumple para todo } n \in \mathbb{N} \\ 14n \equiv 21\ (5) \end{cases}$$

esto vale porque ω es primitiva

$14n \equiv 1\ (5)$

$-n \equiv 1\ (5)$

$\boxed{n \equiv 4\ (5)}$ ✓

para que se cumplan las dos condiciones

$$\begin{cases} n \equiv 5\ (7) \\ n \equiv 4\ (5) \end{cases} \Rightarrow \quad n = 7q + 5 = 7(5t+2) + 5 = 35t + 19$$ ✓

uso Teorema chino del resto, luego la sol. es única mod 35

$7q + 5 \equiv 4\ (5)$

$2q \equiv 4\ (5)$

$6q \equiv 3.4\ (5)$

$q \equiv 2\ (5) \rightarrow q = 5t + 2$

$$\begin{cases} \omega^{15n} = \omega^{5} \\ \omega^{14n} = \omega^{21} \end{cases} \quad \boxed{\text{si } n \equiv 19\ (35)}$$ ✓