Álgebra I

1er. cuatrimestre 2021

Primer Recuperatorio del Primer Parcial - 16/07/2021

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

En la primera hoja coloque su nombre completo, número de libreta, carrera y ***turno*** *de práctica al que está incriptx en el SIU Guaraní.*

Ejercicio 1:
Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$\text{Dados } \ a,b,c,d \in \mathbb{N}, \qquad (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff ad \mid bc \text{ en } \mathbb{Z}.$$

Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

Ejercicio 2:
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}(k^2+6k-1) < 3^n(n^2+5n-4).$$

Ejercicio 3:
Determinar la cantidad de funciones $f : \{1,2,\ldots,8\} \to \{1,2,\ldots,16\}$ que satisfacen **simúltaneamente**:

- f es inyectiva,
- Si x es par, $f(x)$ es par,
- $f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7)$.

Ejercicio 4:
Calcular el valor de $(39^n + 6^{2n} : 45)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

① $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dada por:

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff ad \mid bc \text{ en } \mathbb{Z}.$$

•) ¿$\mathcal{R}$ es reflexiva? Sí.

Sea $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Qvq $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b)$.

$(a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b) \iff ab \mid ba$ en $\mathbb{Z}$, lo cual vale pues $ab=ba$.

$\therefore\ \mathcal{R}$ es reflexiva.

•) ¿$\mathcal{R}$ es simétrica? No.

$(1,2)\,\mathcal{R}\,(2,1)$ porque $1\cdot 1 = 1 \mid 2\cdot 2 = 4$ en $\mathbb{Z}$, pero

$(2,1)\,\not\mathcal{R}\,(1,2)$ porque $2\cdot 2 = 4 \nmid 1\cdot 1 = 1$ en $\mathbb{Z}$.

$\therefore\ \mathcal{R}$ no es simétrica.

•) ¿$\mathcal{R}$ es transitiva? Sí.

Sean $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ /\ \underbrace{(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)}_{\iff ad \mid bc \text{ en } \mathbb{Z}} \wedge \underbrace{(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)}_{\iff cf \mid de \text{ en } \mathbb{Z}}$.

¿Vale que $\underbrace{(a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)}_{\iff af \mid be \text{ en } \mathbb{Z}}$?

Como $ad \mid bc$ en $\mathbb{Z}$, $\exists\, k\in\mathbb{Z}\ /\ bc = k\cdot ad$.

Como $cf \mid de$ en $\mathbb{Z}$, $\exists\, q\in\mathbb{Z}\ /\ de = q\cdot cf$.

y recordemos que $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, por lo que $k,q\in\mathbb{N}$ también.

Luego:

$$bc\,de = k\cdot ad\cdot q\cdot cf$$

$$\Rightarrow be\cdot \underbrace{\overset{\in\mathbb{N}\ \in\mathbb{N}}{cd}}_{\neq 0} = \underbrace{\overset{\in\mathbb{N}\ \in\mathbb{N}}{cd}}_{\neq 0}\cdot k\cdot q\cdot af$$

$$\underset{\text{cancelo } cd}{\Rightarrow} be = \underbrace{k\cdot q}_{\in\mathbb{Z}}\cdot af \Rightarrow af \mid be \text{ en } \mathbb{Z}.$$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es transitiva.

•) ¿$\mathcal{R}$ es antisimétrica? No.

Intuición: $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \wedge (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b).$

$$\Longleftrightarrow ad \mid bc \wedge cb \mid da \text{ en } \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow ad = bc.$$

todos >0 $\quad 2\cdot 6 = 3\cdot 4$

$(2,3)\,\mathcal{R}\,(4,6)$ porque $2\cdot 6 = 12 \mid 3\cdot 4 = 12$ en $\mathbb{Z}$.

$(4,6)\,\mathcal{R}\,(2,3)$ porque $4\cdot 3 = 12 \mid 6\cdot 2 = 12$ en $\mathbb{Z}$.

Sin embargo, $(2,3) \neq (4,6)$.

$\therefore$ $\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

2) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ vale que

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}(k^2+6k-1) < 3^n(n^2+5n-4)$$

Defino el predicado $P(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}(k^2+6k-1) < 3^n(n^2+5n-4)$", $n \in \mathbb{N}$.

Qvq $P(n)$ vale $\forall n \geq 2$. Lo pruebo por inducción (corrida).

•) Caso base:

$P(2)$ es verdadero $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{2} 3^{k-1}(k^2+6k-1) < 3^2(2^2+5.2-4)$

$$\Longleftrightarrow 3^0(1+6-1) + 3\cdot(4+12-1) < 9(4+10-4)$$

$$\Longleftrightarrow 51 < 90, \text{ lo cual vale.}$$

$\therefore$ $P(2)$ es verdadero.

•) Paso inductivo:

Sea $h \geq 2$, $h \in \mathbb{N}$. Supongamos que $P(h)$ es verdadero, es decir,

$\underbrace{\text{vale que } \sum_{k=1}^{h} 3^{k-1}(k^2+6k-1) < 3^h(h^2+5h-4).}_{}$ HI

Qvq $P(h+1)$ es verdadero, o sea, debemos ver que:

$$\sum_{k=1}^{h+1} 3^{k-1}(k^2+6k-1) < 3^{h+1}\left[(h+1)^2+5(h+1)-4\right].$$

Sabemos:

$$\sum_{k=1}^{h+1} 3^{k-1}(k^2+6k-1) = \sum_{k=1}^{h} 3^{k-1}(k^2+6k-1) + 3^{h+1-1}\left[(h+1)^2+6(h+1)-1\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{h} 3^{k-1}(k^2+6k-1) + 3^{h}\left[h^2+2h+1+6h+6-1\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{h} 3^{k-1}(k^2+6k-1) + 3^{h}(h^2+8h+6)$$

$$\underset{\text{HI}}{<} 3^h(h^2+5h-4) + 3^h(h^2+8h+6) = 3^h(2h^2+13h+2)$$

Luego, alcanza con ver que $\forall h \geq 2, h \in \mathbb{N}$ vale que:

$$3^h(2h^2+13h+2) \leq 3^{h+1}\left[(h+1)^2+5(h+1)-4\right]$$

$$\iff \cancel{3^h}(2h^2+13h+2) \leq \cancel{3^h}\cdot 3\cdot\left[h^2+2h+1+5h+5-4\right]$$

$$\underset{3^h>0}{\iff} 2h^2+13h+2 \leq 3(h^2+7h+2)$$

$$\iff 0 \leq 3h^2+21h+6-2h^2-13h-2$$

$$\iff 0 \leq \underbrace{h^2}_{\geq 0} + \underbrace{8h}_{\geq 0} + 4, \text{ lo cual vale } \forall h \geq 2.$$

por ser $h \geq 2$ ($\Rightarrow h \geq 0$).

$\therefore P(h+1)$ es verdadero.

Así, $P(2)$ es verdadero y $[\forall h \in \mathbb{N}_{\geq 2}, P(h)$ verdadero $\Rightarrow P(h+1)$ verdadero$]$.

Por el principio de inducción (corrida), $P(n)$ vale $\forall n \geq 2$.