Vectores Aleatorios

- Conjunta: $p_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$
- Marginal: $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$
- $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\geq 2}$ / $\mathrm{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$
- $f_X(x) = \int f(x,y)\, dy$

Función de Probabilidad Condicional de Y dado X=x

$p_{Y|X=x} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$

Independencia de una Variable Aleatoria

$f_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y) \quad \forall (x,y)$

Esperanza de una función de dos Variables Aleatorias

$\mathrm{E}(h(X,Y)) = \iint h(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

Covarianza

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y)$
- $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$

Propiedades

1. X e Y independientes $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\ \mathrm{Cov}(X,Y)$

Correlación

$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

Propiedades

1. $\rho(aX + b, cY + d) = \mathrm{sg}(ac)\ \rho(X,Y)$
2. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
3. $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ con probabilidad 1

Distribución Multinomial (Generalización de la Binomial)

$(X_1, ..., X_k) \sim \mathrm{M}(n, p_1, ...p_k)$ $X_i = \#$ eventos clase i en n repeticiones

$$p_{X_1,..X_k}(x_1, ..., x_k) = \frac{n!}{x_1! \, ...x_k!} \, p_1^{x_1} ... p_k^{x_k} \text{ , si } \; 0 \leq X_i \leq n \; \forall i \quad \wedge \quad \sum x_i = n$$

Suma de Variables Aleatorias

1. $X_1 ... X_n$ independientes $X_i \sim \mathrm{Bi}(n_i, p) \Rightarrow \sum X_i \sim \mathrm{Bi}(\sum n_i, p)$
2. $X_1 ... X_n$ iid $X_i \sim \wp(\lambda_i) \Rightarrow \sum X_i \sim \wp(\sum \lambda_i)$
3. $X_1 ... X_n$ iid $X_i \sim \mathrm{G}(p) \Rightarrow \sum X_i \sim \mathrm{BN}(n, p)$
4. $X_1 ... X_n$ iid $X_i \sim \varepsilon(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$
5. $X_1 ... X_n$ independientes $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma(\sum \alpha_i, \lambda)$
6. $X_1 ... X_n$ iid $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum a_i X_i \sim \mathrm{N}(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$

(Demostraciones usando las Funciones Generadoras de Momentos)

Función Generadora de Momentos de la suma de v.a. independientes:

$$\mathrm{M}_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{X_i}(t)$$

Esperanza y Varianza de la suma de Variables Aleatorias

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{E}(X_i)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum i = 1^n a_i X_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum \sum_{i<j} a_i a_j \, \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Corolario

1. $X_1 ... X_n$ independientes $\Rightarrow \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \mathrm{Var}(X_i)$
2. $X_1 ... X_n$ iid $\mathrm{E}(X_i) = \mu, \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu \qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\sigma^2$$

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu \quad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Desigualdad de Markov

X v.a. $X \geq 0$

$$\forall a > 0, \quad \mathrm{P}(X > a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$$

Desigualdad de Chebyshev

X v.a. $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < \infty$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathrm{P}(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Convergencia en Probabilidad

$X_1, X_2, ...$ sucesión de variables aleatorias

$X_n \xrightarrow{p} X$ si $\forall \epsilon > 0, \quad \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Propiedades de la Convergencia en Probabilidad

$$X_1, X_2, ... \quad X_n \xrightarrow{p} a, \qquad Y_1, Y_2, ... \quad Y_n \xrightarrow{p} b$$

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{p} a + b$

2. $X_n \, Y_n \xrightarrow{p} a \, b$

3. $X_n / Y_n \xrightarrow{p} a/b \quad b \neq 0$

4. $g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$ g contínua en a

5. C_n sucesion numerica $C_n \longrightarrow c \Rightarrow CnY_n \xrightarrow{p} c\,a$

Ley de los Grandes Números

$X_1, X_2, ...$ iid $\mathrm{E}(X_i) = \mu, \; V(X_i) = \sigma^2 < \infty$

$$\overline{X_n} = \frac{\sum X_i}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

Teorema Central del Límite

$X_1, X_2, ...$ iid $\mathrm{E}(X_i) = \mu, \ \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$$

ó si n es grande

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

1. Si $X_i \sim \mathrm{Bi}(1,p)$ $\quad \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$
2. Si $X_i \sim \wp(\lambda)$ $\quad \sum X_i \sim \wp(n\lambda)$ $\quad \frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{\frac{n\lambda}{n}}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$

INFERENCIA

Estimación Puntual

$X_i \sim F_\theta$ Estimación puntual de un parámetro $\theta \Rightarrow \hat{\theta} =$ función de la muestra

Métodos

1. Método de Momentos
   a) Igualar momentos muestrales y poblacionales
   b) Resolver Ecuaciones
2. Método de Máxima Verosimilitud
   a) Construímos $f_{X_1,..X_n}(x_1,...,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i,\theta) = L(\theta)$
   b) $\hat{\theta}$ es el valor de θ (en el soporte de θ) que maximiza $L(\theta)$

Propiedad de Invarianza de los EMV

$\hat{\theta}_1, ...\hat{\theta}_m$ EMV de $\theta_1, ...\theta_m$ $\quad h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ inyectiva

$$\text{EMV de } h(\theta_1, ...\theta_m) = h(\hat{\theta}_1, ...\hat{\theta}_m)$$

Propiedades de los Estimadores

Muestra $X_1...X_n,\ X_i \sim F_\theta,\ \ \hat{\theta}$ estimador de θ

1. $\hat{\theta}$ insesgado de θ si $\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}) = \theta \ \ \forall\theta$
   Sesgo de $\hat{\theta} = \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$
2. $\hat{\theta}$ asintóticamente insesgado si $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}) = \theta \ \ \forall\theta$
   - Error Estándar de un Estimador
     $$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}$$
   - Error Cuadrático Medio
     $$\mathrm{ECM}_\theta(\hat{\theta}) = \mathrm{E}_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) + [\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta]^2$$
3. $\hat{\theta}$ es un estimador consistente de θ si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$

¿Cómo evaluar Consistencia?

a) Usando LGN y propiedades de convergencia en probabilidad
b) Usando que $E_\theta(\hat{\theta_n}) \to \theta$ y $V_\theta(\hat{\theta_n}) \to 0 \Rightarrow \hat{\theta_n} \xrightarrow{p} \theta$
c) Usando Chebyshev

Estimación por Intervalos de Confianza

$X_i \sim F_\theta$
IC de nivel $1-\alpha$ para $\theta \rightarrow [a(X_1...X_n), b(X_1...X_n)]$ donde

$$P(a(X_1...X_n) \leq \theta \leq b(X_1...X_n)) = 1-\alpha$$

1. $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $\;X_1...X_n$ iid

   a) IC para μ, σ_0^2 conocido
   $$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

   b) IC para μ, σ desconocido
   $$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{s} \sim t_{n-1} \qquad \overline{X} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

   c) IC para σ^2, μ_0 conocido
   $$\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2 \qquad \left[\frac{\sum(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{\sum(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

   d) IC para σ^2, μ desconocido
   $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \qquad \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

Método general para obtener IC

$T(X_1...X_n, \theta)$ pivote $\sim F$ conocida, no depende de otros parámetros
$\mathrm{P}(a \leq T(X_1...X_n, \theta) \leq b) = 1-\alpha$

IC de nivel asintótico $1-\alpha$

Pivote $T(X_1...X_n, \alpha) \overset{a}{\sim} F$ cuando n es grande

Propiedades de Convergencia en Distribución

$Y_n \xrightarrow{d} Y, U_n \xrightarrow{p} a$, entonces:

1. $Y_n \pm U_n \xrightarrow{d} Y \pm a$
2. $U_n Y_n \xrightarrow{d} aY$
3. Si $a \neq 0$ $\;\frac{Y_n}{U_n} \xrightarrow{d} \frac{Y}{a}$

IC asintótico para parámetro p (Binomial)

$\hat{p} = \frac{\sum X_i}{n}$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1) \qquad \hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Test de Hipótesis

$X_1 ... X_n$ iid $X_i \sim F_\theta$

Hipótesis

- Nula $\rightarrow H_0 : \theta = \theta_0$
- Alternativa
  - $H_1 : \theta < \theta_0$
  - $H_2 : \theta > \theta_0$
  - $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (bilateral)
- Test = Procedimiento que controla uno de los dos posibles tipos de error.
- Nivel de Significación = α = P(Rechazar H_0 cuando es verdadera) = P_{θ_0}(Rechazar H_0)

Test para parámetros de $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Test de nivel exacto α para μ

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \begin{array}{l} \text{a) } H_1 : \mu < \mu_0 \\ \text{b) } H_1 : \mu > \mu_0 \\ \text{c) } H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

1. Varianza Conocida σ_0^2

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1) \text{ (bajo } H_0)$$

Rechazo H_0 si

a) $T \leq -z_\alpha$

b) $T \geq z_\alpha$

c) $|T| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

2. Varianza Desconocida σ_0^2

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{s} \sim t_{n-1} \text{ (bajo } H_0)$$

Rechazo H_0 si

a) $T \leq -t_{n-1,\alpha}$

b) $T \geq t_{n-1,\alpha}$

c) $|T| \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$

Función Potencia

a) $\pi(\mu) = 1 - \phi(z_\alpha + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}})$

b) $\pi(\mu) = \phi(-z_\alpha + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}})$

c) $\pi(\mu) = 1 - \phi(z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}) + \phi(-z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}})$

Test para μ, varianza conocida
Tamaño muestra para $\pi(\mu) \geq 1-\beta$ (β pequeño) cuando $\mu = \mu_1$ [$\mu_1 \in H_1$]

$$n \geq \left(\frac{(z_a+z_b)\sigma_0}{\mu_1-\mu_0}\right)^2$$

3. Test para σ^2

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \begin{array}{l} \text{a) } H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ \text{b) } H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \text{c) } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array}$$

Estadístico:

$$U = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1,\alpha} \text{ (bajo } H_0)$$

Rechazo H_0 si

a) $U \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

b) $U \geq \chi^2_{n-1,\alpha}$

c) $U \geq \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ ó $U \leq \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$

Test de Hipótesis de nivel aproximado α

1. para la media μ $X_1...X_n$ iid $X_i \sim F$ $\mathrm{E}(X_i) = \mu$
Estadístico

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{s} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1) \text{ (bajo } H_0)$$

Rechazo H_0 si

a) $T \leq -z_\alpha$

b) $T \geq z_\alpha$

c) $|T| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

Función de potencia aproximada y tamaño muestra similar a las obtenidas en 1.1, pero cambiando σ_0 por s.

2. Para el parámetro p de una Binomial

$$\begin{array}{ll} H_0 : p = p_0 & \text{a) } H_1 : p < p_0 \\ & \text{b) } H_1 : p > p_0 \\ & \text{c) } H_1 : p \neq p_0 \end{array}$$

Estadístico

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \xrightarrow{d} \text{N}(0,1) \text{ (bajo } H_0)$$

Rechazo H_0 si

a) $T \leq -z_\alpha$

b) $T \geq z_\alpha$

c) $|T| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

Relación Test de Hipótesis Bilateral e IC

Dado un IC de nivel $1 - \alpha$ para θ, el test que rechaza $H_0 : \theta = \theta_0$ cuando $\theta_0 \notin \text{IC}(X_1 ... X_n)$ tiene nivel $1 - \alpha$.