1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANÁLISIS 1

Final - 22/02/2011

1. *a)* Probar que existe la integral impropia $\int_1^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ y calcularla.
   b) Probar que la función $F:\mathbb{R}_{\geq 1}\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ es creciente y acotada.
   c) ¿Existe $\int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$?

2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^2 y $x_0\in\mathbb{R}^2$. Consideremos las siguientes condiciones sobre f:
   1) $\nabla f(x_0)=(1,0)$.
   2) La matriz Hessiana $Hf(x_0)$ de f en el punto x_0 es la matriz nula.
   3) $\nabla f(x_0)=(0,0)$.
   4) $Hf(x_0)$ es definida negativa.
   5) $Hf(x_0)$ es definida positiva.

   a) ¿Cuáles de estas condiciones son necesarias para que f tenga un mínimo relativo en x_0?
   b) ¿Cuáles son todas las condiciones que *impiden* que f tenga un mínimo relativo en x_0?
   c) ¿Es posible encontrar dos o más condiciones que juntas aseguren que f tiene un mínimo relativo en x_0?

3. Pruebe que si la función $u(x,y)$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial de Laplace
$$u_{xx}+u_{yy}=0$$
en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ entonces la función
$$v(x,y)=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
también la satisface.

IMPOSIBLE?

4. Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F(0,0)=1$ y $\nabla F(0,0)=(1,1)$.
   - ¿Es cierto que existen infinitos puntos (x,y) tales que $F(x,y)=1$?
   - Sea $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(2t-1,t^2-1/4)$ y sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función $g(t)=F(\gamma(t))$. Calcular $g'(1/2)$. Probar que g es creciente en un intervalo abierto alrededor del punto 1/2.

5. Sea b un número real positivo. Calcular el volumen del tetraedro en $\mathbb{R}^3$ delimitado por los planos $x=0, y=0, z=0$ y $2bx+2y+z=2b$.

Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{22/02/011}$

1) a) $$\int_1^{\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-u}\, du = -e^{-u}\Big|_{1/2}^{\infty} = -e^{-\infty} - (-e^{-1/2}) = \boxed{1/\sqrt{e}}$$

$\frac{t^2}{2} = u$

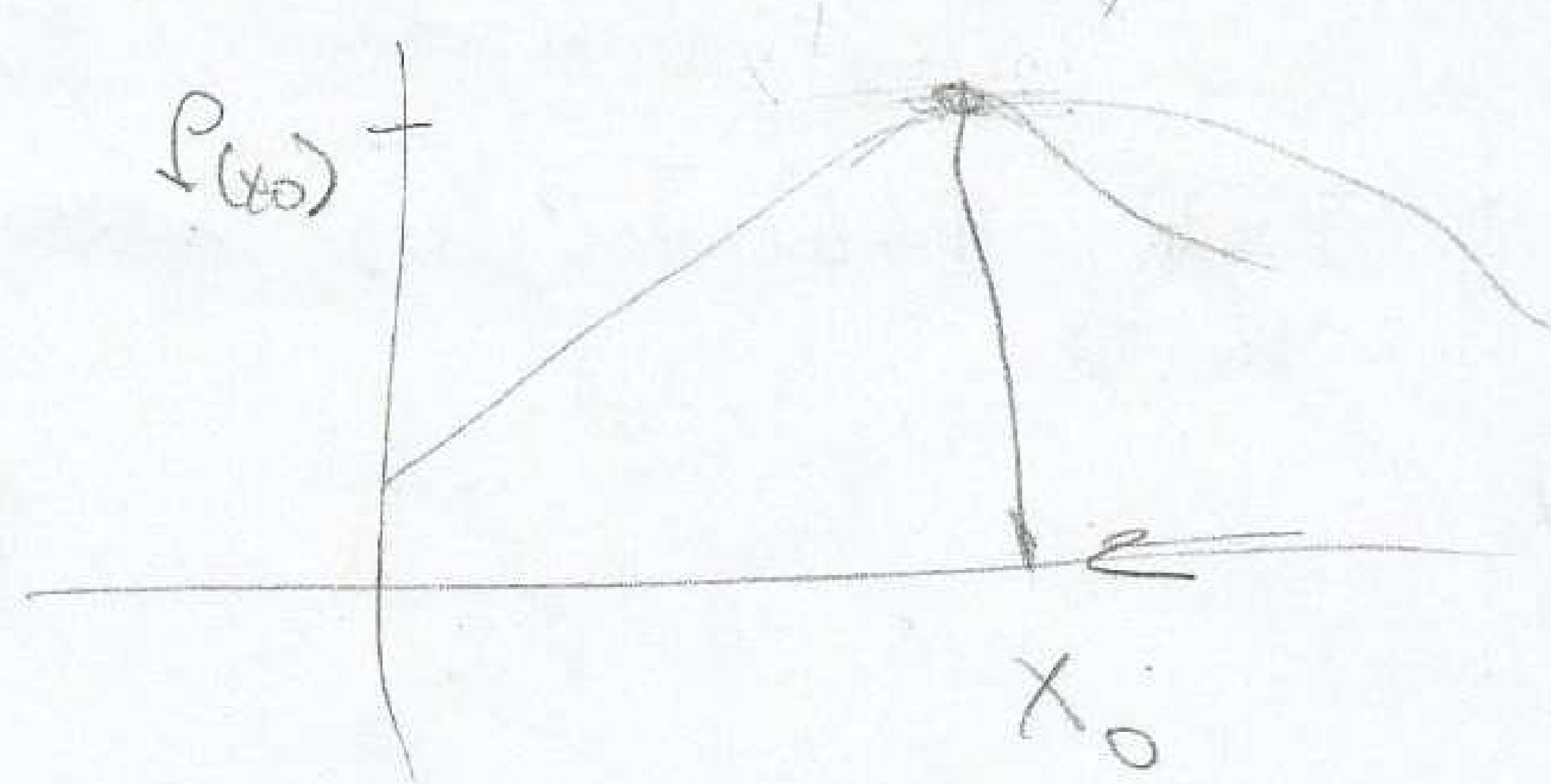
$du = t\, dt$

b) $F: \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ es creciente y acotada

Como $e^{-\frac{t^2}{2}}$ es continuo, por el TFC, $F'(x) = e^{-t^2/2} > 0 \Rightarrow$ es creciente

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \int_1^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{e^{t^2}}} \leq \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \boxed{x^4 \leq e^{x^4}}$

sale con fritos



22/02/11

④ $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F \in \mathcal{C}^1$ $\quad F(0,0)=1$ $\quad \nabla F(0,0)=(1,1)$

① $F \in \mathcal{C}^1$
$\nabla F(0,0) \neq 0$
Sea $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y)=1\}$

$\xRightarrow{TFI}$ ∃ ϕ continua, entorno abierto, Bola $\Rightarrow$ ∃ infinitos puntos

② $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ $\qquad \gamma(t)=(2t-1,\ t^2-1/4)$

$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\qquad g(t)=F(\gamma(t))=(F\circ\gamma)(t)$

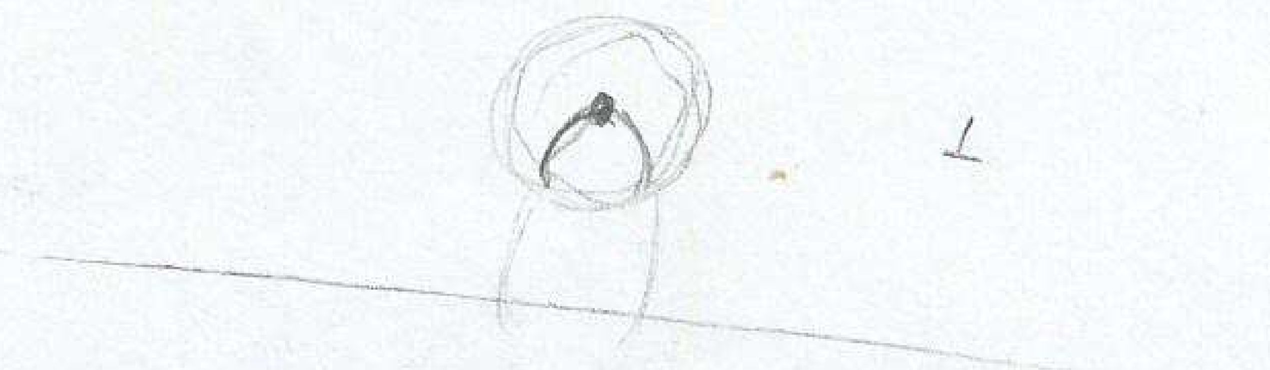
$g'(1/2)$ y $g'\geq 0$ $\forall x\in(1/2-\varepsilon,\ 1/2+\varepsilon)$

$\underbrace{g'(t)}_{1\times 1}=\underbrace{F'(\gamma(t))}_{1\times 2}\cdot\underbrace{\gamma'(t)}_{2\times 1}$ ✓ $\qquad t\in(1/2-\varepsilon,\ 1/2+\varepsilon)$

$g'(1/2)=F'(\gamma(1/2))\ \gamma'(1/2)=F'(0)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=(1,1)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\boxed{3}$

$F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)>0 \quad \Leftarrow \quad F'(\gamma(t))>0$ y $\gamma'(t)>0$

$\gamma'(t)=(2,\ 2t)>0 \Leftrightarrow t\geq 0$ ✓



$F'(\gamma(t))>0$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)),\ \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\right)$$

γ es continua en $(1/2)$ $\Rightarrow |t-1/2|<\delta \Rightarrow |\gamma(t)-\gamma(1/2)|<\varepsilon$

$|t-1/2|<\delta \Rightarrow |\gamma(t)|<\varepsilon$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ es continua en 0 $\Rightarrow |\gamma(t)-0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(t))-\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(1/2))\right|<\varepsilon_2$

$\Rightarrow$

$|t-1/2|<\delta \Rightarrow |\gamma(t)-\gamma(1/2)|<\varepsilon_1 \Rightarrow \left|\frac{\partial F}{\partial x}(t)-1\right|<\varepsilon_2$

$x=0$ $\quad y=0$ $\quad z=0$ $\qquad x \qquad 2bx+2y+z=2b$

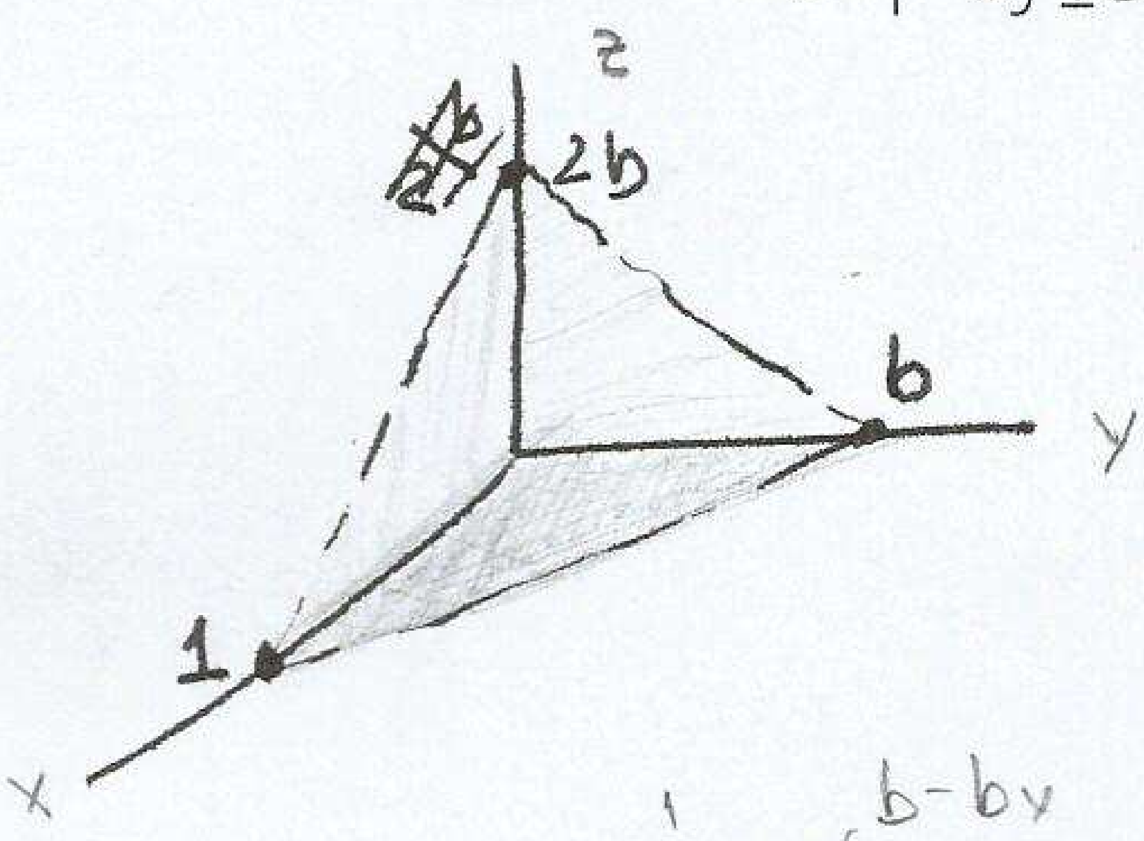
$2bx=2b$

$x=1$

$2y=2$

·√·≈·■⌠■n⌡·■n≈■²· ≈ ·n·≈n⌠·≥⌡±ε ±♣√·≡÷·n■≈⌠ ÷▼∩⌡·Φ≤»HOL<75EA4<49DCE=K<;=S┤φ≥·≈ °

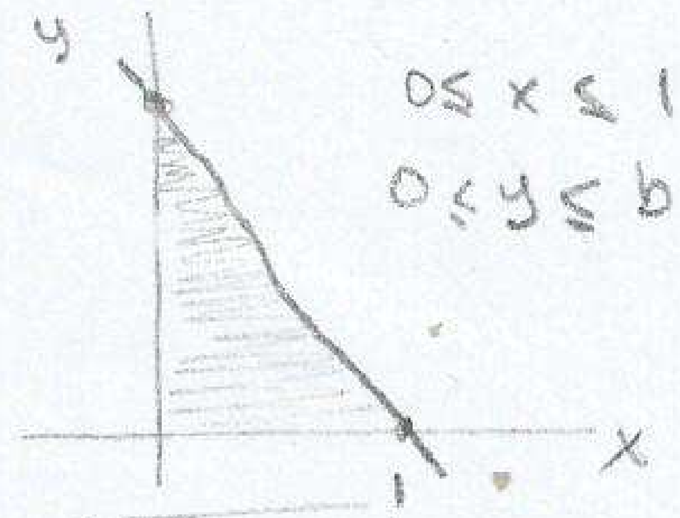
5



$\boxed{z=0}$

$2bx+2y=2b$

$y=b-bx$



$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le b-bx$

$$\int_0^1 \int_0^{b-bx} \int_0^{2b-2bx-2y} 1 \, dz \, dy \, dx = \boxed{\frac{2b^2}{3}}$$

$\boxed{1/3/4}$

2

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

$$\forall v : \|v\|=1 \Rightarrow \exists \frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(hv_1, hv_2) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} v_1 h^2 v_2^2}{\cancel{h}(h^2v_1^2+h^2v_2^2)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2} v_1 v_2^2}{h \cdot \cancel{h}(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{\cancel{h}(v_1^2+v_2^2)} = \boxed{\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\,y - F(0,0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = (T, T)$$