N° 21

1	2	3	4
25	25	25	25

CALIF.
100

APROBADO ¡Felicitaciones! (!!)

TURNO NOCHE

Probabilidad y Estadística (C) - Primer Parcial - 15/05/2017

APELLIDO Y NOMBRE:

Cantidad de hojas:

Para aprobar este examen debe resolver dos ejercicios bien o sumar un puntaje mayor o igual a 60.
Colocar nombre, apellido y L.U. en cada hoja. Resolver cada ejercicio en una hoja diferente.
Justifique todas sus respuestas

---

25 1. Se tienen dos urnas con 10 bolillas cada una. En la primera hay 3 blancas y 7 negras, mientras que en la segunda hay 5 blancas y 5 negras. Mario arroja un dado. Si sale 1 o 2, saca 2 bolillas SIN reposición de la primera urna, y si sale cualquier otro número, extrae 2 bolillas de la segunda urna CON reposición. Se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \text{“Cantidad de bolillas negras extraídas”}.$$
$$X_1 = \text{“Cantidad de bolillas negras extraídas dado que salió 1 o 2 en el dado”}.$$
$$X_2 = \text{“Cantidad de bolillas negras extraídas dado que salió 3, 4, 5 o 6 en el dado”}.$$

(a) i. (6) Hallar la probabilidad puntual de X.
ii. (6) Calcular la esperanza y la varianza de X.
iii. (6) ¿Qué distribuciones famosas tienen X_1 y X_2?

(b) (7) Supongamos ahora que Belén tira un dado. Si sale par saca una bolilla de la urna uno, en caso contrario saca una bolilla de la dos. Repite el experimento varias veces (es decir, vuelve a tirar el dado, saca una bolilla de alguna urna según salga par o impar y la vuelve a meter de donde la sacó) y lo hace hasta obtener por tercera vez una blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra en la séptima extracción? ¿Qué distribución famosa está asociada a este experimento?

Aclaración: Para indicar la “distribución famosa”, se debe dar tanto el nombre de la distribución como los parámetros.

25 2. La probabilidad de que una semilla germine en una maceta es $p = 0.5$. La probabilidad de que una semilla germinada se desarrolle a una planta adulta es $q = 0.25$. Se dispone de dos macetas y en cada una se coloca una semilla. Sabemos además que las germinaciones de semillas distintas son independientes entre sí, y que los desarrollos también lo son. Sean

$$X = \text{“ cantidad de semillas que germinaron”}.$$
$$Y = \text{“cantidad de plantas adultas”}$$

(a) (10) Calcule la función de probabilidad puntual conjunta para el vector (X, Y).

(b) (8) Calcule la función de probabilidad puntual de Y y su esperanza.

(c) (7) Si ahora se disponen de 5 macetas en vez de 2 cada una con una semilla. Calcular $p_{X|Y=4}(5)$

25 3. La empresa Intertel asegura que que la velocidad de descarga D de su servicio premium se distribuye como una normal centrada en la velocidad contratada y que ademas la probabilidad que D diste de su media en menos de 20 MB/s es 0.9544. Si una empresa contrata un servicio de 250 MB/s

(a) (7) Determinar la distribución de D.

(b) (4) Asumiendo que la varianza de D es $\sigma^2 = 100$, calcular la probabilidad de que la velocidad de descarga sea menor que 227 MB/s.

(c) (7) Intertel promete realizar un descuento a la empresa si pueden reportan un caso donde la velocidad de descarga sea menor a 227 MB/s. La empresa decide realizar una medición independiente de velocidad cada día hasta obtener un caso reportable. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga el descuento al sexto día? ¿Qué distribución famosa se encuentra asociada a este experimento?

(d) (7) Calcular la cantidad de mediciones independientes que se deben realizar para que en al menos una de las mediciones, la velocidad de descarga sea menor a 227 MB/s, con probabilidad mayor a 0.7

25 4. Sea X una variable aleatoria con densidad $\mathcal{U}[0,1]$. Si $X = x$ se elige un número Y uniformemente entre 0 y x. Es decir

$$Y|_{X=x} \sim \mathcal{U}\,[0,x]\,.$$

(a) (5) Calcular la densidad conjunta del vector (X, Y) y graficar su soporte (rango).

(b) (10) Hallar la densidad marginal f_Y.

(c) (10) Calcular $E(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$ y $\mathrm{cov}(3X+Y,X)$

Ejercicio 1

② ~~URNA~~ $\boxed{\text{URNA A}}$ → 3 B, 7 N $\boxed{\text{URNA B}}$ → 5 B, 5 N

$P(1 \cup 2) = P(\text{'salgo 1 ó 2 en el dado'}) = P(1) + P(2) = \frac{1}{3}$

$P((1 \cup 2)^c) = P(\text{'sale 3, 4, 5 ó 6'}) = \frac{2}{3}$

$X_1(x) = X(x) / (1 \cup 2)$ $X_2(x) = X(x) / (1 \cup 2)^c$

$P(X = x) = P(X_1 = x / (1 \cup 2)) \cdot P(1 \cup 2) + P(X_2 = x / (1 \cup 2)^c) \cdot P((1 \cup 2)^c)$

$= P(X_1(x)) \cdot \frac{1}{3} + X_2(x) \cdot 2/3$

X_1 puede ser 0, 1, 2.

$P_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$

$P_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = 2\left(\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}\right) = \frac{7}{15}$

$P_{X}(2) = P(X_1 = 2) = \frac{7}{10} \cdot 6/9 = \frac{7}{15}$

X_2 puede ser 0, 1, 2.

$P_{X_2}(0) = P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_{X_2}(1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$P_{X_2}(2) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_X(0) = X_1(0) \cdot \frac{1}{3} + X_2(0) \cdot 2/3 = 17/90$

$P_X(1) = X_1(1) \frac{1}{3} + X_2(1) \cdot 2/3 = 22/45$

$P_X(2) = X_1(2) \cdot 1/3 + X_2(2) \cdot 2/3 = \frac{29}{90}$

iii) $X_2 \sim Bi\left(2, \frac{1}{2}\right)$ $X_1 \sim H(10, 7, 2)$

X_2 → "cant de éxitos de 2 (n) experimentos con probabilidad $p = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$". $p = P(\text{salga una negra}) \to Bi(n, p)$

X_1 → "de 2 ~~elemen~~ elementos extraídos (n) de una población total de 10 bolitas (N) que tiene 7 bolitas negras (B), cuantos de ellos son negros (buenos)'.

↳ $H(N, B, m) \to H(10, 7, 2)$ ✓

Por lo tanto, (i)

$$P_X(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{7}{x}\binom{3}{2-x}}{\binom{10}{2}} + \frac{2}{3}\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$$

(ii)

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot E(X_1) + \frac{2}{3} \cdot E(X_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{17}{15}$$ ✓

$X_1 \sim H(N, B, m)$

$E(X_1) = m \cdot \frac{B}{N}$

$X_2 \sim Bi(m, p)$

$E(X_2) = m \cdot p$

$$V(X) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot V(X_1) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot V(X_2)$$ ✓

$V(X_2) = m \cdot p(1-p)$

$V(X_1) = m \frac{B}{N} \frac{(N-B)}{N} \frac{(N-m)}{(N-1)}$

$$V(X) = \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{(10-7)}{10} \cdot \frac{(10-2)}{(10-1)} + \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{178}{675}$$

error de cuenta $\frac{37}{75}$

(b) Y = "sale una blanca".

I = "sale impar" I^c = "sale par"

$P(I) = \frac{1}{2}$ $P(I^c) = 1/2$

$$P(Y) = P(Y/I) \cdot P(I) + P(Y/I^c) \cdot P(I^c)$$

$P(Y/I) = \frac{3}{10}$ $P(Y/I^c) = \frac{1}{2}$ → de 10 bolitas, 5 casos que sale blanca $\left(\frac{5}{10} = 1/2\right)$

↳ de 10 bolitas, 3 casos que sale blanca

$$P(Y) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2/5$$

B = "cantidad de extracciones hasta que salgan 3 blancas".

$B \sim NB(3, 2/5)$ → $p(\text{"salga blanca"}) = P(Y) = 2/5$

↳ $P_B(7) = P(B=7) = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^3 (1 - 2/5)^4 = \frac{1944}{15625}$

Ejercicio 2

c)

$P(G) = P(\text{"la semilla germine"}) = \frac{1}{2}$

$P(D/G) = P(\text{"la semilla se desarrolle dado que germina"}) = \frac{1}{4}$.

$$P(Y=y/X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y/X=x).$$

$$P(X=0, Y=0) = \underbrace{P(X=0)}_{(\frac{1}{2})^2} \cdot \underbrace{P(Y=0/X=0)}_{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot \underbrace{P(Y=1/X=0)}_{0} = 0.$$

$$P(X=0, Y=2) = P(X=0) \cdot P(Y=2/X=0) = 0.$$

$$P(X=1, Y=0) = \underbrace{P(X=1)}_{2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} \cdot \underbrace{P(Y=0/X=1)}_{(1-1/4) \to \text{no se desarrolla}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=1, Y=1) = \underbrace{P(X=1)}_{2(1/2)(1/2)} \cdot \underbrace{P(Y=1/X=1)}_{1/4} = 1/8.$$

$$P(X=1, Y=2) = \underbrace{P(X=1)}_{2(1/2)(1/2)} \cdot \underbrace{P(Y=2/X=1)}_{0} = 0.$$

$$P(X=2, Y=0) = \underbrace{P(X=2)}_{(\frac{1}{2})^2} \cdot \underbrace{P(Y=0/X=2)}_{(1-1/4)^2} = 9/64$$

$$P(X=2, Y=1) = \underbrace{P(X=2)}_{(1/2)^2} \cdot \underbrace{P(Y=1/X=2)}_{2(1-1/4)\cdot(1/4)} = 3/32$$

$$P(X=2, Y=2) = \underbrace{P(X=2)}_{(1/2)^2} \cdot \underbrace{P(Y=2/X=2)}_{(1/4)^2} = 1/64$$

X \ Y	0	1	2	$P_X(x)$
0	1/4	0	0	1/4
1	3/8	1/8	0	1/2
2	9/64	3/32	1/64	1/4
$P_Y(y)$	49/64	7/32	1/64	1

→ probabilidad puntual de Y.

$P_Y(0) = 49/64$

$P_Y(1) = 7/32$

$P_Y(2) = \frac{1}{64}$

(b)

$$E(Y) = 0 \cdot 49/64 + 1 \cdot 7/32 + 2 \cdot 1/64 = \frac{1}{4}$$ ✓

(c) $P(X=5 / Y=4) = \dfrac{P(Y=4 / X=5) \cdot P(X=5)}{P(Y=4)} = \dfrac{96}{21875}$ ⊗

$P(X=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ✓ $\qquad P(Y=4/X=5) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(3/4\right) = \frac{15}{1024}$ ✓

$P(Y=4) = \overbrace{P(Y=4/X=0)}^{0} \cdot P(X=0) + P(Y=4/X=4) \cdot P(X=4) +$

$\underbrace{P(Y=4/X=1)}_{0} \cdot P(X=1) + \underbrace{P(Y=4/X=2)}_{0} \cdot P(X=2) + \underbrace{P(Y=4/X=3)}_{0} \cdot P(X=3) + P(Y=4/X=5) \cdot P(X=5)$ ✓

$$= \underbrace{P(Y=4/X=4)}_{(1/4)^4} \cdot \underbrace{P(X=4)}_{\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}} + \underbrace{P(Y=4/X=5)}_{\left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{1}} \cdot \underbrace{P(X=5)}_{(1/2)^5}$$ ✓

$$= \frac{5}{8192} + \frac{15}{32768} = \frac{35}{32768}$$ ✓

⊗ todo lo que hiciste está bien pero hiciste mal la cuenta final. Da $\dfrac{15/32768}{35/32768} = 3/7$

Pero todo el planteo está perfecto.
(Sólo tené cuidado con los números la próxima!!).

Ejercicio 3

ⓐ $\mu = 250$ MB/s → velocidad contratada.

$D \sim N(250, \sigma^2)$

$\frac{X-\mu}{\sigma} = N(0,1)$ → es standard.

$P(|D - 250| \leq 20) = 0{,}9544$

$P(-20 \leq D - 250 \leq 20) = 0{,}9544$

$P(230 \leq D \leq 270) = 0{,}9544$

$P(D \leq 270) - P(D \leq 230) = 0{,}9544$

$P\left(\frac{X-250}{\sigma} \leq \frac{270-250}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-250}{\sigma} \leq \frac{230-250}{\sigma}\right) = 0{,}9544$

$= P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right) =$ → por simetría.

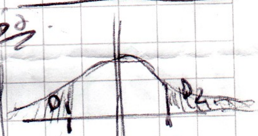
$= \theta\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \left(P\left(Z \geq \frac{20}{\sigma}\right)\right) = \theta\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \left(1 - \theta\left(\frac{20}{\sigma}\right)\right)$

$2\,\theta\left(\frac{20}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9544$

$\theta\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0{,}9772$ → por tabla

$\frac{20}{\sigma} = 2$

$\boxed{\sigma = 10.}$ → $\sigma^2 = 100$



$D_1 = D_2$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \geq \frac{20}{\sigma}\right)$

Por lo tanto:

$D \sim N(250, 100)$.

ⓑ $P(D \leq 227) = P\left(\frac{X-250}{10} \leq \frac{227-250}{10}\right) =$

$= P\left(Z \leq -\frac{23}{10}\right) = P\left(Z \geq \frac{23}{10}\right) = 1 - \theta\left(\frac{23}{10}\right)$

$= 1 - 0{,}9893 = 0{,}0107$

ⓒ "velocidad de descarga menor a 227 MB/s" $= A$

~~$P(A) = P(Y=X)$~~ $P(A) = 0{,}0107$.

$Y =$ "cantidad de repeticiones del evento hasta que se encuentra un caso en el que la velocidad de descarga es menor a 227 MB/s"

$Y \sim Ge(0{,}0107)$ → $p = P(A)$

$P_Y(6) = P(Y=6) = 0{,}0107\,(1-0{,}0107)^5 = 0{,}01013967$

d) M = "de los m repeticiones, cuantos tienen velocidad de descarga menor a 227 MB/s"

$M \sim Bi(m, 0{,}0107)$.

$P(M \geq 1) > 0{,}7$

$1 - P(M=0) > 0{,}7$

$0{,}3 > \binom{m}{0}(0{,}0107)^0 (1-0{,}0107)^m$

$0{,}3 > (0{,}9893)^m$

$\log_{10} 0{,}3 > m \log_{10} 0{,}9893$

$m > 111{,}9$

$\to \boxed{m = 112}$

Ejercicio 4

$Y/X=x \sim$

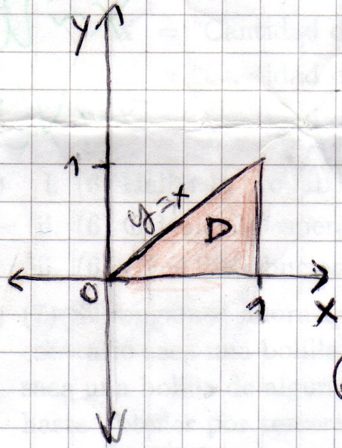
ⓐ $f_{Y/f_X=x}(y) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{[0,x]}(y)$

$X \sim U_{[0,1]} \Rightarrow f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

$f_{Y/f_X=x}(y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$

$\frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]}(y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]}(y) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$



Ⓓ $0 \leq y \leq x$ o $0 \leq y \leq 1$

$0 \leq x \leq 1$ $\quad y \leq x \leq 1$

dos formas distintas de escribir la región

ⓑ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]}(y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \cdot \mathbb{1}_{[y,1]}(x) \cdot dx$

$= \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, \ln(x)\Big|_y^1 = -\ln(y) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

ⓒ $E(y) = \int_{-\infty}^{+1} -\ln(y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, \cancel{dy} \cdot y\, dy$

$= -\int_0^1 \underbrace{\ln(y)}_{v} \cdot \underbrace{y\, dy}_{u'} = -\left(\frac{y^2}{2} \cdot \ln(y) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{y} \cdot dy \right)$

$v = \ln(y) \quad v' = \frac{1}{y}$

$u' = y \quad u = \frac{y^2}{2}$

$= \frac{1}{2} \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y\ \frac{1}{x}\ \mathbb{1}_{[0,x]}(y)\ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\ dy\,dx\right.$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^x y\ dy\right)dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$\operatorname{cov}(3X+Y,X) = 3\underbrace{\operatorname{cov}(X,X)}_{V(X)} + \operatorname{cov}(X,Y) = 3\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,\mathbb{1}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

P.o. DES DECI[illegible]
$X \sim \mathcal{U}(0,1)$
$\Rightarrow V(X) = 1/12$