

## PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

### PRÁCTICA 4

1. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- ¿Cuál es el valor de  $k$ ?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que tanto  $X$  como  $Y$  sean menores que 2,6?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que  $\max(X, Y) < 2,6$ ?
  - Hallar  $f_X$  y  $f_Y$ , las funciones de densidad marginales.
2. De un grupo de tres profesores, dos graduados y un alumno debe seleccionarse al azar una comisión de dos personas. Sean  $X$  el número de profesores e  $Y$  el número de graduados en la comisión.
- Hallar la función de probabilidad conjunta del par  $(X, Y)$  y las marginales de  $X$  e  $Y$ .
  - ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no forme parte de la comisión?
3. Sea  $(X, Y)$  una v.a. bidimensional continua con distribución uniforme en el trapecio de vértices  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, 0)$ .
- Hallar la función de densidad conjunta de  $(X, Y)$ .
  - Calcular  $P(Y \leq X)$ .
  - Hallar las funciones de densidad marginales  $f_X$  y  $f_Y$ .
4. Para iluminar sin interrupción una sala (de computadoras!) se cuenta con dos lamparitas; cuando se quema una, se coloca la otra. Sean  $X$  e  $Y$  los tiempos de vida de cada lamparita (en  $10^3$  horas) y supóngase que esos tiempos son independientes y tienen distribución  $\mathcal{E}(1)$ .
- Hallar la densidad conjunta de  $(X, Y)$ .
  - Hallar la probabilidad de que la sala permanezca iluminada al menos 2000 horas.
5. Dos servidores  $A$  y  $B$  procesan trabajos a medida que van llegando. El tiempo que tarda el servidor  $A$  en procesar un trabajo es una variable aleatoria  $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$ , mientras que el tiempo que tarda el servidor  $B$  es una variable aleatoria  $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$ . Ambos servidores actúan en forma independiente. Dos trabajos llegan simultáneamente y son atendidos uno por  $A$  y otro  $B$ . ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor  $A$  termine con su trabajo antes que  $B$ ?
6. (\*) Retomemos el problema anterior y supongamos que tres trabajos llegan simultáneamente. Uno es atendido por  $A$ , otro por  $B$  y el tercero queda esperando a que uno de los servidores se libere. Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , pruebe que la probabilidad de que el último trabajo en ser atendido sea el último en ser completado es 0.5.

7. En los ejercicios 1 a 3:
- Decir si  $X$  e  $Y$  son independientes (justificando en cada caso).
  - Hallar las funciones de probabilidad puntual condicional o de densidad condicional, según corresponda.
8. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo  $X$  el número de caras. Si  $X = a$  se extraen sin reposición  $a + 1$  bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea  $Y$  el número de bolillas rojas extraídas.
- Hallar la distribución de  $Y$  dado  $X = a$ , para  $a = 0, 1, 2, 3$ .
  - Obtener una tabla con la distribución conjunta del par  $(X, Y)$  y hallar la función de probabilidad puntual marginal  $p_Y$ .
  - ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes?
  - Si se extrajeron 2 bolillas blancas, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?
9. (\*) Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos  $X$  e  $Y$  en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además se supondrá que estos tiempos son independientes.
- ¿Cuál es la densidad conjunta de  $X$  e  $Y$ ?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 20:15 y las 20:45?
  - Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?
10. En los ejercicios 1 a 3, calcular:
- $\text{cov}(X, Y)$  y  $\rho(X, Y)$ .
  - $E(X + Y)$  y  $V(X + Y)$ .
11. Implementar una función en R que, dada la tabla de la función de probabilidad puntual conjunta de un vector aleatorio  $(X, Y)$ , devuelva la covarianza y la correlación entre  $X$  e  $Y$ .
12. (\*) Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con distribución uniforme en la región:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x \leq y \leq x + h$  para todo  $0 < h < 1$ .
- Calcular  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(XY)$ .
  - Hallar  $\rho_{XY}$ .
  - ¿A qué tiende  $\rho_{XY}$  cuando  $h$  tiende a cero? ¿Por qué?
13. (\*) Sea  $X$  una variable aleatoria con densidad  $\mathcal{U}[0, 1]$ . Si  $X = x$ , se elige un número  $Y$  entre 0 y  $x$ . Por lo tanto  $Y|_{X=x} \sim \mathcal{U}[0, x]$ .

- a) Hallar la densidad conjunta del par  $(X, Y)$  y la densidad marginal  $f_Y$ .
- b) Calcular  $E(Y)$ ,  $V(Y)$ ,  $\text{cov}(X, Y)$  y  $\text{cov}(X, X + Y)$ .
14. Se va a guardar un archivo de longitud 100 caracteres, cada uno de los cuales toma el valor A, B, C ó D. Las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos caracteres son  $p_A = 0,70$ ,  $p_B = 0,12$ ,  $p_C = 0,10$  y  $p_D = 0,08$ . Se definen:
- $A$ : número de veces que ocurre la letra A.
- $B$ : número de veces que ocurre la letra B.
- etc. Suponiendo independencia:
- a) ¿Qué distribución tiene el vector aleatorio  $(A, B, C, D)$ ?
- b) Hallar las distribuciones marginales de  $A, B, C$  y  $D$ .
- c) Para ahorrar memoria se decide representar estos caracteres según la siguiente tabla basada en el código de Huffman.

Letra	Código
A	1
B	00
C	011
D	010

Sea  $X =$  Tamaño del archivo codificado (en bits).

- d) Hallar  $E(X)$ .
15. La longitud de ciertas varillas de metal tiene distribución  $N(5, 0,25)$ . Para hacer un control de calidad se eligen 40 varillas al azar. Hallar la probabilidad de que 1 varilla mida menos de 4 cm, 13 varillas midan entre 4 y 4.8 cm, 18 varillas midan entre 4.8 y 5.5 cm, y el resto de las varillas mida más de 5.5 cm.
16. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) con función de distribución  $F_X$ . Se definen las variables aleatorias
- $$T = \text{máx}(X_1, \dots, X_n)$$
- $$U = \text{mín}(X_1, \dots, X_n)$$
- a) Probar que  $F_T(t) = [F_X(t)]^n$ .
- b) Probar que  $F_U(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n$ .
- c) Si las variables  $X_i$  tienen densidad  $f_X(x)$ , hallar las densidades de  $U$  y  $T$  en función de  $f_X(x)$  y  $F_X(x)$ .
17. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución  $\mathcal{U}[2, 2,5]$  y considerando que las tres alturas alcanzadas son independientes:
- a) Hallar la función de distribución del puntaje.

- b) Hallar el valor esperado del puntaje.
18. (\*) Sean  $X$  e  $Y$  v.a. independientes, tales que  $X \sim Bi(n, p)$  e  $Y \sim Bi(m, p)$ . Probar que:
- a)  $X + Y \sim Bi(n + m, p)$ .  
 (NOTA:  $\sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$ .)
- b) La distribución de  $X$  condicional a  $X + Y = k$  es  $\mathcal{H}(k, n, m + n)$ .
19. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie A y 11 de la especie B para experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1, y se considera que las ratas mueren en forma independiente.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?
- b) Si murieron 2, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie A?
20. (\*) Sean  $X$  e  $Y$  v.a. independientes, ambas con distribución  $\mathcal{G}(p)$ . Probar que  $X + Y \sim BN(2, p)$ .
21. (\*) Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d.. Se define  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- a) Calcular  $E(S)$  y  $V(S)$  para los siguientes casos:  
 i.  $X_i \sim Bi(1, p)$ .  
 ii.  $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ .
- b) Usando los Ejercicios 18 y 20, hallar la distribución de  $S$  para los dos casos anteriores.
- c) Deducir de (a) y (b) la esperanza y la varianza de variables aleatorias con distribución  $Bi(n, p)$  y  $BN(r, p)$ .
22. (\*) Sean  $X$  e  $Y$  v.a. independientes tales que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ . Probar que:
- a)  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .
- b) La distribución de  $X$  condicional a  $X + Y = k$  es  $Bi\left(k, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$ .
- c) Sean  $X$  e  $Y$  v.a. tales que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e  $Y|_{X=k} \sim Bi(k, p)$ . Probar que  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ .
23. Dos terminales  $A$  y  $B$  están conectadas a un servidor. La cantidad de requerimientos que realiza la terminal  $A$  en el lapso de un segundo sigue una distribución  $\mathcal{P}(2)$  mientras que para la terminal  $B$  sigue una distribución  $\mathcal{P}(3)$ . Ambas terminales actúan en forma independiente.
- a) Hallar la probabilidad de que en un segundo haya más de 3 requerimientos al servidor.

- b) Si en un determinado segundo hubo dos requerimientos al servidor, ¿cuál es la probabilidad de que haya provenído uno de cada terminal?
- c) (\*) Si el 30% de los requerimientos necesita grabar en disco (y el 70% restante no), hallar el valor esperado para la cantidad de requerimientos de disco en el lapso de 15 segundos.

24. Para los vectores aleatorios de los ejercicios 1 y 3, hallar

- a) el mejor predictor constante de  $Y$  y su error cuadrático medio de predicción.
- b) el mejor predictor lineal de  $Y$  basado en  $X$  y su error cuadrático medio de predicción.