- Resolución del segundo recuperatorio 2C 2022 - Álgebra I

by Horax

20/12/2022

Ejercicio 1

Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente que:

$$14a \equiv 21 \pmod{35} \quad \text{y} \quad 7^6 \mid a^3$$

Resolución:

Arranquemos analizando la ecuación de congruencia, y veamos que información podemos extraer de ahí:

$$14a \equiv 21 \pmod{35} \tag{1}$$

Reescribiéndola de la siguiente forma, observamos que hay un factor común 7:

$$7 \cdot 2a \equiv 7 \cdot 3 \pmod{7 \cdot 5}$$

Simplificando obtenemos que:

$$14a \equiv 21 \pmod{35} \iff 2a \equiv 3 \pmod{5}$$

Si tomamos la solución particular $a_0 = -1$, cumple (1), ya que:

$$2 \cdot (-1) = -2 \equiv 3 \pmod{5}$$

De esta forma, simplificamos (1), y nos queda:

$$14a \equiv 21 \pmod{35} \rightsquigarrow 2a \equiv 3 \pmod{5} \rightsquigarrow a \equiv -1 \pmod{5}$$

Cuya solución final mod 5 es:

$$\boxed{a \equiv 4 \pmod{5}}$$

Ahora, veamos la otra condición que nos dan:

$$7^6 \mid a^3 \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $7^6 = (7^2)^3$, reescribiendo de esta forma la condición, deducimos que:

$$(7^2)^3 \mid a^3 \iff 7^2 = 49 \mid a$$

Luego:

$$\boxed{a \equiv 0 \pmod{49}}$$

Juntando los dos resultados que obtuvimos hasta ahora, las condiciones originales se condensan en el siguiente problema, buscamos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{cases} a \equiv 4 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{49} \end{cases}$$

Y como $5 \perp 49$, el TCR nos garantiza que existe una única solución a_0 tal que $0 \leq a_0 < 5 \cdot 49 = 245$. Por lo tanto:

$$\begin{cases} a \equiv 4 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{49} \end{cases} \rightsquigarrow \quad a \equiv a_0 \pmod{245}$$

Busquemos entonces ese a_0. De la segunda ecuación, sabemos que como $49 \mid a$, esto es equivalente a que $a = 49k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo esta expresión en la primer ecuación, y tomando la solución particular $k = 1$, que cumple la nueva congruencia que resulta, nos termina quedando que:

$$49k \equiv 4 \pmod{5} \rightsquigarrow k \equiv 1 \pmod{5}$$

Luego, $k = 5l + 1$, con $l \in \mathbb{Z}$. De esta forma, podemos re-expresar el a tal que:

$$a = 49k = 49 \cdot (5l + 1) = 245l + 49$$

Tomando $l = 0$, para obtener una solución dentro del rango deseado, nos queda como respuesta final:

$$\begin{cases} a \equiv 4 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{49} \end{cases} \rightsquigarrow \quad \boxed{a \equiv 49 \pmod{245}}$$

Ejercicio 2

Determinar todos los primos $p \in \mathbb{N}$ que satisfacen que:

$$5\,p \mid 6^{p-1} + 10^{p^2} + 119$$

Resolución:

Analicemos en primer lugar el caso $p = 5$. Veamos si:

$$5 \cdot 5 = 25 \mid 6^4 + 10^{25} + 119 \iff 6^4 + 10^{25} + 119 \equiv 0 \pmod{25}$$

Analicemos la cuestión termino por termino, tomando congruencia mod 25:

$$\begin{cases} 6^4 = 36^2 \equiv 11^2 = 121 \equiv 21 \pmod{25} \\ 10^{25} = (10^5)^5 \equiv 0^5 \equiv 0 \pmod{25} \\ 119 \equiv 19 \pmod{25} \end{cases}$$

Juntando toda la información, nos queda que:

$$6^4 + 10^{25} + 119 \equiv 21 + 0 + 19 = 40 \equiv 15 \not\equiv 0 \pmod{25}$$

Luego, $p \neq 5$. Ahora, si p no es 5, sabemos entonces que, como $p \perp 5$ (al ser primos distintos):

$$5\,p \mid 6^{p-1} + 10^{p^2} + 119 \iff \begin{cases} 5 \mid 6^{p-1} + 10^{p^2} + 119 \\ p \mid 6^{p-1} + 10^{p^2} + 119 \end{cases}$$

Como veremos a continuación, 5 divide a toda la expresión, pues:

$$6^{p-1} + 10^{p^2} + 119 \equiv 1^{p-1} + 0^{p^2} + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

Luego, nos resta ver cuales son los $p \in \mathbb{N}$ tales que:

$$p \mid 6^{p-1} + 10^{p^2} + 119$$

Factorizando 6, 10 y 119 vemos que $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ y $119 = 7 \cdot 17$ por lo cual, a priori sabemos que p puede ser tal que $p \in \{2, 3, 7, 17\}$. El caso $p = 5$ lo descartamos porque ya fue evaluado previamente.

<u>$p = 2$:</u>

$$6^1 + 10^4 + 119 \equiv 0 + 0^4 + 1 \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{2}$$

Luego, p no puede ser 2.

<u>$p = 3$:</u>

$$6^2 + 10^9 + 119 \equiv 0^2 + 1^9 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

Tenemos entonces que $p = 3$ es un caso posible.

<u>$p = 7$:</u>

Revisemos la congruencia término por término:

- $$6^6 = 36^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{7}$$
- Como $7 \not\mid 10$, y 7 es primo, por el PTF sabemos que:

  $$10^{49} \equiv 10^{r_6(49)} \pmod{7}$$

  $$10^{49} \equiv 10^1 = 10 \equiv 3 \pmod{7}$$
- $$119 \equiv 0 \pmod{7}$$

Juntando toda la data, nos queda que:

$$6^6 + 10^{49} + 119 \equiv \ 1 + 3 + 0 \equiv \ 4 \not\equiv \ 0 \pmod 7$$

Entonces, tenemos que $p \neq 7$.

<u>$p = 17$:</u>

Procedemos igual que en el caso anterior:

- $$6^{16} = 36^8 \equiv \ 2^8 = 16^2 \equiv \ (-1)^2 \equiv \ 1 \pmod{17}$$
- Como $17 \not| \ 10$ y 17 es primo, por el PTF tenemos que:
$$10^{289} \equiv \ 10^{r_{16}(289)} \pmod{17}$$
$$10^{289} \equiv \ 10^1 \equiv \ 10 \pmod{17}$$
- $$119 \equiv \ 0 \pmod{17}$$

Volviendo a la congruencia de la expresión que nos interesa:

$$6^{16} + 10^{289} + 119 \equiv \ 1 + 10 + 0 \equiv \ 11 \not\equiv \ 0 \pmod{17}$$

Ergo, $p \neq 17$.

Ya que cubrimos los dos casos preliminares, veamos si existe algún otro $p \in \mathbb{N}$ que divida a la expresión.

En otras palabras, queremos ver que pinta tiene:

$$6^{p-1} + 10^{p^2} + 119 \ \equiv \ ? \pmod p$$

1. Ya que $p \not| \ 6$ (asumimos $p \neq 2, 3$), por el PTF sabemos que:
$$6^{p-1} \equiv \ 1 \pmod p$$
2. Al ser p un primo, $p \neq 2, 5$, por el PTF tenemos:
$$10^p \equiv \ 10 \pmod p$$

Tendremos entonces que:

$$6^{p-1} + 10^{p^2} + 119 \ \equiv \ 1 + 10 + 119 \equiv \ 130 \pmod p$$

Y, como $130 = 2 \cdot 3 \cdot 13$, si $p = 13$, nos queda:

$$6^{12} + 10^{12^2} + 119 \ \equiv \ 1 + 10 + 119 \equiv \ 130 \equiv \ 0 \pmod{13}$$

Y así nos queda $p = 13$ como el otro caso posible. Finalmente, y reuniendo todo lo que obtuvimos, concluimos que:

$$\boxed{p \in \{3, 13\}}$$

Ejercicio 3

Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $f = 2X^5 + 2aX^4 - (1+2a)X^3 - (2+a)X^2 + aX + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales f tiene al menos una raíz múltiple ***entera****, y para cada valor hallado determinar las multiplicidades de cada una de esas raíces.*

Resolución:

En primer lugar, arranquemos viendo las posibles raíces de f. Como $f \in \mathbb{Z}[X]$, gracias al lema de Gauss, sabemos que si α es una raíz racional de f ($\alpha \in \mathbb{Q}$), entonces:

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$$

que son las posibles combinaciones de los divisores del termino independiente y del coeficiente principal de f, respectivamente. Aparte, como pedimos que $\alpha \in \mathbb{Z}$, los unicos candidatos posibles son $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$. Probemos evaluar f en ambos, e igualando a 0:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + 2a - (1+2a) - (2+a) + a + 1 \\ &= 2 + 2a - 1 - 2a - 2 - a + a + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\alpha = 1$ es raíz de f, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^5 + 2a(-1)^4 - (1+2a)(-1)^3 - (2+a)(-1)^2 + a(-1) + 1 \\ &= -2 + 2a + 1 + 2a - 2 - a - a + 1 \\ &= 2a - 2 = 0 \iff a = 1 \end{aligned}$$

Vemos que $\alpha = -1$ es raíz de f si y solo si $a = 1$. Ahora, teniendo esta información, si pedimos que f admita una raíz entera múltiple, pedimos entonces que $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$. Antes de ver cada caso en particular, calculemos la derivada de f:

$$f' = 10X^4 + 8aX^3 - 3(1+2a)X^2 - 2(2+a)X + a$$

Empecemos con el caso $\alpha = 1$, evaluando e igualando a 0 para deducir el valor de a:

$$\begin{aligned} f'(1) = 10 + 8a - 3(1+2a) - 2(2+a) + a &= 0 \\ 10 + 8a - 3 - 6a - 4 - 2a + a &= 0 \\ 3 + a = 0 \iff \boxed{a = -3} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que, si tomamos $a = -3$, 1 es raíz múltiple de f (sabemos que al menos $(x-1)^2 \mid f$). Ahora, nos queda el caso $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned} f'(-1) = 10(-1)^4 + 8a(-1)^3 - 3(1+2a)(-1)^2 - 2(2+a)(-1) + a &= 0 \\ 10 - 8a - 3 - 6a + 4 + 2a + a &= 0 \\ -11a + 11 = 0 \iff \boxed{a = 1} \end{aligned}$$

Y este valor de a concuerda con el que habíamos obtenido previamente para que -1 sea raíz de f.

Ahora bien, vamos a ver la multiplicidad tanto de 1 como de -1 como raíces de f. De antemano sabemos que ambas tienen como mínimo multiplicidad 2, ya que las dos anulan tanto a f como a f'. Veamos si son de multiplicidad 3. Para el caso $\alpha = 1$, vamos a evaluar f'' en dicho valor, y veremos si esta se anula. Para empezar, sustituyendo el valor de $a = -3$ en f', esta nos queda:

$$f' = 10X^4 - 24X^3 + 15X^2 + 2X - 3$$

Derivando f':

$$f'' = 40X^3 - 72X^2 + 30X + 2$$

Evaluando en 1 resulta:

$$f''(1) = 40 - 72 + 30 + 2 = 0$$

Luego, 1 anula también anula a la segunda derivada de f, y por lo tanto es de multiplicidad triple ¿Será también cuádruple?

$$f''' = 120X^2 - 144X + 30$$

$$f'''(1) = 120 - 144 + 30 = 6 \neq 0$$

Y... no, claramente no. Entonces, $\alpha = 1$ es raíz triple de f, ya que anula las derivadas sucesivas **solamente** hasta la segunda inclusive.

Por ultimo, nos queda ver la multiplicidad de -1 como raíz. Vamos a ir por un camino distinto, utilizando la divisibilidad de polinomios y su relación con las raíces. Inicialmente, sabemos que (tomando $a = 1$), $mult(-1, f) = 2$. Veamos que es no es raíz triple. Tenemos que:

$$mult(-1, f) = 3 \iff (X + 1)^3 \mid f$$

Reemplazando $a = 1$ en f, nos queda de la siguiente pinta:

$$f = 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 - 3X^2 + X + 1$$

Y desarrollando $(X + 1)^3$:

$$(X + 1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$$

Realizando la división entre ambos, nos queda que el resto es no nulo, y tenemos que:

$$f = (2X^2 - 4X + 3) \cdot (X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + (-2X^2 - 4X - 2)$$

Concluimos entonces que:

$$(X + 1)^2 \mid f \quad \text{y} \quad (X + 1)^3 \nmid f$$

Luego, -1 es raíz doble de f.

Para finalizar, resumamos toda la información que recolectamos, para escribir nuestra respuesta final:

- Con $a = -3$, $\alpha = 1$ es raíz triple de f.
- Tomando $a = 1$, $\alpha = -1$ es raiz doble de f.

Ejercicio 4

Factorizar

$$f = X^5 - iX^4 - 4X^3 + 4iX^2 + 4X - 4i \in \mathbb{C}[X]$$

como producto de irreducibles mónicos en $\mathbb{C}[X]$ *sabiendo que tiene una raíz en común con el polinomio*

$$g = X^5 + 2iX^4 - 4X^3 - 8iX^2 + 4X + 8i$$

Resolución:

Sabemos que, dado $\gamma \in \mathbb{C}$, tenemos que:

$$f(\gamma) = 0 \quad \text{y} \quad g(\gamma) = 0 \iff (f : g)(\gamma) = 0$$

Calculemos entonces $(f : g)$, mediante el algoritmo de Euclides:

$$f = 1 \cdot (X^5 + 2iX^4 - 4X^3 - 8iX^2 + 4X + 8i) + (-3iX^4 + 12iX^2 - 12i)$$

donde $q_1 = 1$ y $r_1 = -3iX^4 + 12iX^2 - 12i$

$$g = (-3iX^4 + 12iX^2 - 12i) \cdot (\frac{1}{3}iX - \frac{2}{3})$$

siendo $q_2 = \frac{1}{3}iX - \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$.

Como r_1 es el ultimo resto no nulo, dividiéndolo por su coeficiente principal, nos queda el máximo común divisor entre f y g:

$$(f : g) = \frac{r_1}{cp(f)} = X^4 - 4X^2 + 4$$

Viéndolo fuerte, sale que podemos factorizarlo así:

$$X^4 - 4X^2 + 4 = (X^2 - 2)^2$$

Ahora factorizamos $X^2 - 2$, y tenemos que:

$$X^2 - 2 = 0 \iff X = \pm\sqrt{2}$$

De esta forma, $(f : g)$ nos termina quedando así:

$$(f : g) = (X^2 - 2)^2 = ((X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}))^2 = (X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2$$

De donde podemos deducir que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son raíces de f de multiplicidad 2. Dividiendo f por $(f : g)$, resulta:

$$f = (X - i)(X^4 - 4X^2 - 4) = (X - i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2$$

Y de tal forma nos queda la factorizacion de f en irreducibles monicos (ya que queda escrito como producto de irreducibles de grado 1, y potencias de irreducibles), en $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{f = (X - i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2}$$

■

Bon voyage, y éxitos a todos!