Nombre y apellido... Número de libreta..........

El examen se aprueba con seis puntos.

Ejercicio 1.(2 puntos) Sea X la variable aleatoria que cuenta cantidad de multas recibidas por un automovilista durante un año. Suponga que la función de probabilidad puntual de X está dada por

k	0	1	2
$p_X(k)$	0.15	0.50	0.35

1. (1 punto) Hallar $E[X]$ y $V(X)$.
2. (1 punto) Cada día la municipalidad de la ciudad le cobra a 100 automovilistas las multas recibidas durante el año anterior. Cada multa cuesta 1200. Hallar en forma aproximada la probabilidad de que en un día la municipalidad recaude pesos 156000 o más.

Ejercicio 2(2.5 puntos) Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables i.i.d., con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$.

1. (0.5 puntos) Proponga una región de rechazo de nivel $\alpha = 0{,}05$ para
$$H_0 = \{\mu = 5\} \quad vs. \quad H_1 = \{\mu > 5\} \ .$$
2. (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de no rechazar H_0 si $\mu = 6$, cuando $n = 16$.
3. (0.8 puntos) Determine cuan grande debe ser n para que la probabilidad de no rechazar H_0 si $\mu = 6$ sea a lo sumo 0,1.
4. (0.7 puntos) Basado en una muestra de tamaño $n = 10$, se observa $\overline{x} = 6{,}22$. Indique el menor nivel α para el que puede rechazar H_0.

Ejercicio 3: (3 puntos) Responda sin justificar:

1. (0.3 puntos) Sea $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Obtenga la distribución de $Y = I_{[0,1/5]}(U)$: $Y \sim \ldots$.
2. (0.6 puntos) Sea (X, Y) un vector aleatoria con función de distribución conjunta dada por F_{XY}. Entonces,
$$\lim_{x\to+\infty} F_{XY}(x,y) = \qquad \lim_{x\to-\infty} F_{XY}(x,y) = \qquad \lim_{x,y\to+\infty} F_{XY}(x,y) =$$
3. (0.6 puntos) Sean X_n variables aleatorias con $X_n \sim B(n, p_n)$. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, indique cuanto vale el siguiente límite
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \ldots \ .$$

4. (0.6 puntos) Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 2,3$. Indique el valor de

$$P(N_2 = 7, N_5 = 11) \ .$$

5. (0.9 puntos) Sean $X_1, \cdots, X_k$ variables independientes.

   a) Si $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, entonces $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ \ldots.$
   b) Si $X_i \sim BN(j_i, p)$, entonces $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ \ldots.$
   c) Si $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, entonces $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ \ldots.$
   d) Si $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, entonces $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ \ldots.$
   e) Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ \ldots.$

Ejercicio 4: Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ variables i.i.d., con dendidad conjunta dada por

$$f(x) = e^{(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x) \ .$$

1. (1 punto) Encuentre $\widehat{\theta}$, el estimador de momentos de θ y determine si es consistente, justificando su respuesta.

2. (1 punto) Encontra $\tilde{\theta}$, el estimador de máxima verosimilitud de θ y determine si es consistente, justificando su respuesta.

3. (0.5 puntos) Sea $M_n = \text{mín}\{X_1, \cdots, X_n\}$. Demuestre que $M_n \to \theta$ en probabilidad.