1	2	3	4	Calificación
B	B	B-	R	8 (ocho)

APELLIDO Y NOMBRE: .... NO. DE LIBRETA: ....

CARRERA: CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Álgebra I

Examen final - 04/03/2024

Ejercicio 1. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = 4 \quad a_2 = 5$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - 10a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n \equiv 4^n\ (11)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y calcular el resto de la división por 11 de $\sum_{n=1}^{2024} a_n$

Ejercicio 2.

a) *Enunciar la definición de divisibilidad para enteros y determinar si la relación* $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Z}$ dada por

$$a\mathcal{R}b \quad \text{si y solo si} \quad a \mid b \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$$

es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

b) Calcular el cardinal del conjunto

$$\{a \in \mathbb{Z} : a\,\mathcal{R}\,14580000 \text{ y } a \equiv 0\,(15)\}$$

Ejercicio 3. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales el polinomio

$$f = x^5 + 15ax^4 + 12bx^3 - 18x^2 - 1$$

tiene al menos una raíz racional. Probar que esta raíz es la única raíz racional de f y que, además, es simple.

Ejercicio 4. Hallar $a \in \mathbb{Z}$ de forma tal que el polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ dado por ~~con~~ $a \neq 0$

$$f = x^5 - (4i - 4)x^4 - (16i + 8)x^3 + (16i - 11)x^2 - (20i - 16)x - a$$

tenga una raíz entera. Para los valores de a hallados, dar la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$ si además se sabe que $(f : x^6 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ y su grado es mayor que 1.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles, y sea claro al escribir.

HOJA 1

1) $a_1 = 4$, $a_2 = 5$ y $a_{n+2} = a_{n+1} - 10 a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: $a_n \equiv 4^n \ (11)$ lo pruebo por inducción

• Caso base:

$P(1)$: $a_1 \equiv 4^1 \ (11)$ y esto es cierto porque $a_1 = 4$ por definición de la sucesión

$P(2)$: $a_2 \equiv 4^2 \ (11)$
$\equiv 16 \equiv 5 \ (11)$ y esto es cierto porque $a_2 = 5$ por definición de la sucesión

Entonces $P(1)$ y $P(2)$ son VERDADERAS

• Paso inductivo: qpq $P(h)$ V $\wedge$ $P(h+1)$ V $\Rightarrow P(h+2)$ V $\forall h \in \mathbb{N}$

HI: $a_h \equiv 4^h \ (11) \wedge a_{h+1} \equiv 4^{h+1} \ (11)$

QPQ: $a_{h+2} \equiv 4^{h+2} \ (11)$

pero por definición de la sucesión

$a_{h+2} = a_{h+1} - 10 a_h \overset{HI}{\equiv} 4^{h+1} - 10 \cdot 4^h \ (11)$

$$
\begin{aligned}
4^{n+1} - 10 \cdot 4^{n} &\equiv 4^{n+1} + 4^{n} \quad (11) \\
&\equiv 4^{n} \cdot 4 + 4^{n} \quad (11) \\
&\equiv 4^{n} \cdot 5 \quad (11) \\
&\equiv 4^{n} \cdot 16 \quad (11) \\
&\equiv 4^{n} \cdot 4^{2} \quad (11) \\
&\equiv 4^{n+2} \quad (11)
\end{aligned}
$$

entonces llegamos a que, por transitividad de la congruencia, $a_{n+2} \equiv 4^{n+2}$ (11) como se quería probar

Entonces, probados los 2 casos base y el paso inductivo vale que $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ahora quiero calcular el resto de dividir $\sum_{n=1}^{2024} a_n$ por 11

pero por lo probado anteriormente sé que:

$$\sum_{n=1}^{2024} a_n \equiv \sum_{n=1}^{2024} 4^{n} \quad (11)$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{2024} 4^{n} = \sum_{n=0}^{2024} 4^{n} - 1 \overset{\text{SUMA GEOMETRICA}}{=} \frac{4^{2025}-1}{4-1} - 1 = \frac{4^{2025}-1}{3} - \frac{3}{3}}$$

HOJA 2

$$\sum_{m=1}^{2024} 4^m = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2022} + 4^{2023} + 4^{2024}$$

Me interesa saber a cuánto es congruente 4^m mod 11 para todo $m \in \mathbb{N}$. Voy a usar PTF porque 11 es primo y no divide a 4

$$4^m \equiv 4^{r_{10}(m)} \ (11) \quad \text{donde } m \in \mathbb{N}$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)
4^m	1	4	5	9	3	1	4	5	9	3	(11)

$m \equiv 1 \ (10) \Leftrightarrow m = 1 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 202$

$m \equiv 2 \ (10) \Leftrightarrow m = 2 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 202$

$m \equiv 3 \ (10) \Leftrightarrow m = 3 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 202$

$m \equiv 4 \ (10) \Leftrightarrow m = 4 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 202$

$m \equiv 5 \ (10) \Leftrightarrow m = 5 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 201$

$m \equiv 6 \ (10) \Leftrightarrow m = 6 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 201$

$m \equiv 7 \ (10) \Leftrightarrow m = 7 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 201$

$m \equiv 8 \ (10) \Leftrightarrow m = 8 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 201$

$m \equiv 9 \ (10) \Leftrightarrow m = 9 + 10K \qquad 0 \leq K \leq 201$

$m \equiv 0 \ (10) \Leftrightarrow m = 10K \qquad 1 \leq K \leq 202$

esta elección de K me SIRVE para que $1 \leq m \leq 2024$

entonces en $\sum_{n=1}^{2024} 4^n$ hay 203 potencias $n \equiv 1 \ (10)$, habrá

203 términos 4^n congruentes a 4 mod 11

$$\sum_{n=1}^{2024} 4^n = \underset{4\,(11)}{\underset{|||}{4^1}} + \ldots + \underset{4\,(11)}{\underset{|||}{4^{11}}} + \ldots + \underset{4\,(11)}{\underset{|||}{4^{21}}} + \ldots + \underset{4\,(11)}{\underset{|||}{4^{2021}}} + \ldots$$

Aplicando esta forma ~~llegamos a que~~ con cada cada resto de n mod 10 llego a que:

$$\sum_{n=1}^{2024} 4^n \equiv 203.4 + 203.5 + 203.9 + 203.3 + 202.1 + 202.4 + 202.5 + 202.9 + 202.3 + 202.1 \quad (11)$$

$$\equiv 9 + 3 + 1 + 4 + 4 + 5 + 9 + 3 + 1 + 4 (11)$$

$$\equiv 43 \equiv 10 \ (11)$$

Finalmente $\sum_{n=1}^{2024} a_n \equiv \sum_{n=1}^{2024} 4^n \equiv 10 \ (11)$

el resto de dividir a $\sum_{n=1}^{2024} a_n$ por 11 es 10

2) a) Definición de divisibilidad para enteros:

Sean $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$ se dice que d divide a a si y solo si $\exists k \in \mathbb{Z}$ Tq $a = kd$

Tenemos ahora la relación R en $\mathbb{Z}$:

$$aRb \iff a \mid b \quad \forall a,b \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0$$

(R) Sea $a \in \mathbb{Z}$ es cierto que $a \mid a$ pues $a = \overset{\in \mathbb{Z}}{1} \cdot a$ entonces aRa $\forall a \in \mathbb{Z}$, luego, la relación es reflexiva

No, $0 \not R 0$.

(S) No es simétrica y muestro un contraejemplo:

Supongamos $a = 4 \in \mathbb{Z}$, $b = 2 \in \mathbb{Z}$

bRa pues $b \mid a$ $(4 = \overset{\in \mathbb{Z}}{2} \cdot 2)$

pero $a \not R b$ pues $a \nmid b$

entonces no es cierto que $aRb \Rightarrow bRa$, relación no es simétrica

(AS) No es antisimétrica y muestro un contraejemplo:

Supongamos $a = 5 \in \mathbb{Z}$, $b = -5 \in \mathbb{Z}$

aRb pues $a \mid b$ $(-5 = \overset{\in \mathbb{Z}}{(-1)} \cdot 5)$

bRa pues $b \mid a$ $(5 = \underset{\in \mathbb{Z}}{(-1)}(-5))$

pero $a \neq b$

entonces no es cierto que $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$, la relación no es antisimétrica

B

(T) ¿ $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$? con $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Supongamos que tenemos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tq $aRb \wedge bRc$

$\Rightarrow a|b \wedge b|c \Rightarrow b = k.a \wedge c = m.b$ con $k, m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow c = \underbrace{m.k}_{=l \in \mathbb{Z}}.a \Rightarrow c = l.a \Rightarrow a|c \Rightarrow aRc$$

entonces es cierto que $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$, la relación es transitiva

b) Me piden el cardinal de $\{a \in \mathbb{Z} / aR1458000 \wedge a \equiv 0 (15)\}$

$aR1458000 \Leftrightarrow a \mid 1458000 \qquad a \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow a \mid 2^5 . 3^6 . 5^4$ → TEOREMA FUNDAMENTAL de la ARITMÉTICA

$\Leftrightarrow a \in \{\pm 2^i . 3^j . 5^k\}$ con $\left. \begin{array}{l} 0 \leq i \leq 5 \\ 0 \leq j \leq 6 \\ 0 \leq k \leq 4 \end{array} \right\}$

PROPIEDAD DE COPRIMOS

y $a \equiv 0 (15) \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 0 (3) \\ a \equiv 0 (5) \end{cases}$ 3 DEBE dividir a a; 5 DEBE dividir a a

entonces 3 y 5 deben estar en la factorización de a como producto de primos

luego, $a \in \left\{ \pm 2^i . 3^j . 5^k \text{ con } \begin{array}{l} 0 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 6 \\ 1 \leq k \leq 4 \end{array} \right\}$ P