6 hojas

1	2	3	4	Calificación
B	B=	B	B	A

Apellido y Nombre: [redacted]

No. de libreta: [redacted]

Turno: 1 (MAÑANA)

Carrera: Cs de Computación

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Segundo Parcial - 30/11/2015

---

1. Si $a \in \mathbb{Z}$ satisface que $(7a^{103} + 18 : 132) = 33$, calcular el resto de dividir a a por 66.

2. Sea $\omega \in G_{104}$ una raíz primitiva. Calcular la parte real de

$$\omega^{52} + \sum_{i=0}^{25} \omega^{2i+1}.$$

3. *a*) Hallar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
   - $\operatorname{gr}(f : f') = 2$.
   - $1 + i$ es raíz de f.
   - $X + 1 - \sqrt{5}$ divide a f en $\mathbb{C}[X]$.

   b) Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio hallado en el ítem anterior.

4. Hallar todos los números $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\overline{z}^4 + z^2(2 - 2i)|z| = 0.$$

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

JONATHAN SEIJO.

HOJA ①

FECHA

① $a \in \mathbb{Z}$, $(7a^{103} + 18 : 132) = 33$

Calcular el resto de dividir a a por 66.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad 33 = 3.11.$$

$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad 132 = 2^2.3.11.$$

Como el MCD es 3.11,

i) $11 \mid 7a^{103} + 18$

ii) $3 \mid 7a^{103} + 18$

iii) $2 \nmid 7a^{103} + 18$

2 es un factor de 132 pero no aparece en el MCD, entonces 2 NO es factor de $7a^{103} + 18$ y por lo tanto no lo divide.

i) $11 \mid 7a^{103} + 18$

$7a^{103} + 18 \equiv 0 \pmod{11}$

$7a^{103} \equiv -18 \equiv 4 \pmod{11}$ ⊛

. Si $11 \mid a \Rightarrow 11 \mid 7a^{103}$ y como $11 \mid 7a^{103} + 18 \Rightarrow 11 \mid 18$ ABS.

$\Rightarrow 11 \nmid a$, y como 11 es primo, por el Pequeño Teorema de Fermat,

$a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

luego, $a^{103} = (a^{10})^{10} . a^3 \equiv a^3 \pmod{11}$.

Por lo que $7a^{103} \equiv 7a^3 \pmod{11}$.

volviendo a la ecuación que tenía antes, (⊛),

$7a^3 \equiv 4 \pmod{11}$. $\longrightarrow$ $7(-3) \equiv 1 \ (11)$ pues $11 \mid -21-1$

$a^3 \equiv (-3).4 \pmod{11}$ $\qquad 11 \mid -22$ ✓

$\underline{a^3 \equiv 10 \pmod{11}}$

NOTA

Hago una tabla de congruencia para encontrar congruencia de a mod 11

a	$\cancel{0}$	1	2	3	4	5	-5	-4	-3	-2	$-1 \equiv 10 \pmod{11}$
a^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
a^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

$11 \nmid a$ $\quad$ (mod 11)

entonces, $a^3 \equiv 10 \pmod{11}$ si $\boxed{a \equiv 10 \pmod{11}}$

ii) $3 \mid 7a^{103} + 18$

$$7a^{103} + 18 \equiv 0 \pmod{3}$$

- $18 \equiv 0 \pmod{3}$
- $7 \equiv 1 \pmod{3}$

$$7a^{103} + 18 \equiv \underline{a^{103} \equiv 0 \pmod{3}}.$$

Si $3 \nmid a \Rightarrow 3 \nmid a^{103} \Rightarrow a^{103} \not\equiv 0 \ (3)$ ABS.

Entonces $3 \mid a \Rightarrow 3 \mid a^{103}$

luego, $\boxed{a \equiv 0 \pmod{3}}$

iii) $2 \nmid 7a^{103} + 18$

Como $7a^{103} + 18 \not\equiv 0 \pmod{2}$,

la única posibilidad que queda es que

$$7a^{103} + 18 \equiv 1 \pmod{2}.$$

- $18 \equiv 0 \pmod{2}$
- $7 \equiv 1 \pmod{2}$.

NOTA

[L→] Continúo en sig hoja.

JONATHAN SEIJO

HOJA 2

FECHA

$7a^{103} + 18 \equiv 1 \pmod 2$.

$a^{103} \equiv 1 \pmod 2$.

~~Si~~ ~~absurd~~

Si $2 | a \Rightarrow 2 | a^{103} \Rightarrow a^{103} \equiv 0 \ (2)$ ABS.

$\Rightarrow 2 \nmid a \Rightarrow \boxed{a \equiv 1 \ (2)}$

tengo que:

$$\begin{cases} a \equiv 10 \pmod{11} \\ a \equiv 0 \pmod 3 \\ a \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Como 11, 3, 2 son coprimos dos a dos, el Teorema chino del resto asegura que existe una única solución mod $11 \cdot 3 \cdot 2 = 66$

- $21 \equiv 10 \pmod{11}$ pues $11 | 21 - 10$, $11 | 11$
- $21 \equiv 0 \pmod 3$ pues $3 | 21$
- $21 \equiv 1 \pmod 2$ pues $2 | 21 - 1$, $2 | 20$

Como el teorema asegura que la solución es ÚNICA, y 21 es solución, entonces:

$$a \equiv 21 \pmod{66}.$$

Finalmente, como $0 \leq 21 < 66$, el resto de dividir a a por 66 es <u>21</u>.

NOTA

JONATHAN SEIJO

HOJA 3

FECHA

(2) Sea $w \in G_{104}$ una raíz primitiva.

Calcular la parte real de:

$$Z := \left[w^{52} + \sum_{i=0}^{25} w^{2i+1} \right]$$

Idea.

Si $Z = a + bi$, $\bar{Z} = a - bi$

$Re(Z) = a$,

$$Z + \bar{Z} = a + bi + a - bi = 2a = 2 \cdot Re(Z).$$

Para encontrar la parte real de Z, sumo Z con su conjugado, y luego divido por 2.

$$Z = w^{52} + \underbrace{\sum_{i=0}^{25} w^{2i+1}}_{A}.$$

$$A = \sum_{i=0}^{25} w^{2i} \cdot w \underset{\text{Factor común } w}{=} w \cdot \sum_{i=0}^{25} (w^2)^i \underset{\text{suma geométrica}}{=} w \cdot \frac{(w^2)^{26} - 1}{w^2 - 1} =$$

$w \neq 1$ pues w es primitiva.

$$= w \cdot \left(\frac{w^{52} - 1}{w^2 - 1} \right) = A$$

Por lo tanto, $Z = w^{52} + \dfrac{w \cdot (w^{52} - 1)}{w^2 - 1}$

$$\bar{Z} = \bar{w}^{52} + \bar{w} \cdot \frac{(\bar{w}^{52} - 1)}{(\bar{w}^2 - 1)}$$

$\boxed{\hookrightarrow}$ Continúo atrás.

NOTA

Como $|w| = 1$ (pues w es raíz de la unidad),

$\bar{w} = w^{-1}$ [w es primitiva y $w^{104} = 1$]

$$\bar{w}^{52} = w^{-52} = \underbrace{w^{104}}_{1} \cdot w^{-52} = w^{104-52} = w^{52}$$

$$\bar{w}^{2} = w^{-2} = w^{104} \cdot w^{-2} = w^{104-2} = w^{102}$$

entonces,

$$\bar{z} = w^{52} + \frac{w^{-1}(w^{52}-1)}{w^{102}-1}$$

• $z + \bar{z} =$

$$= w^{52} + \frac{w \cdot (w^{52}-1)}{w^{2}-1} + w^{52} + \frac{w^{-1}(w^{52}-1)}{w^{102}-1}.$$

$$= 2w^{52} + \frac{\overbrace{w \cdot (w^{52}-1)(w^{102}-1)}^{\text{I}} + \overbrace{w^{-1}(w^{52}-1)(w^{2}-1)}^{\text{II}}}{\underbrace{(w^{2}-1)(w^{102}-1)}_{\text{III}}} = *$$

I $= w \cdot (w^{52}-1)(w^{102}-1) =$

$w(w^{102+52} - w^{52} - w^{102} + 1) =$

$w^{155} - w^{53} - w^{103} + w =$

I $= w^{51} - w^{53} - w^{103} + w$.

$w^{104} = 1$,

$w^{155} = w^{155-104} = w^{51}$

II $= w^{-1}(w^{52}-1)(w^{2}-1)$

$w^{-1}(w^{54} - w^{52} - w^{2} + 1)$

II $= w^{53} - w^{51} - w + w^{-1}$

II $= w^{103} + w^{53} - w^{51} - w$

$w^{-1} = w^{-1+104} = w^{103}$

III $(w^{2}-1)(w^{102}-1)$

$\underbrace{w^{104}}_{1} - w^{2} - w^{102} + 1 = 2 - w^{2} - w^{102} =$ III $(\neq 0)$

NOTA

→ Continúa en la siguiente hoja →

JONATHAN SEIJO.

HOJA 4

FECHA

(continuación).

$$\circledast = z + \bar{z} = 2w^{52} + \frac{\text{I} + \text{II}}{\text{III}}.$$

$$\text{I} + \text{II} = \cancel{w^{51}} - \cancel{w^{53}} - w^{103} + \cancel{w} + w^{103} + \cancel{w^{53}} - \cancel{w^{51}} - w$$

$$\text{I} + \text{II} = 0$$

$$\Rightarrow z + \bar{z} = 2w^{52} + \frac{0}{\text{III}} \qquad (\text{III} \neq 0).$$

$$z + \bar{z} = 2w^{52} = 2\,Re(z)$$

$$\Rightarrow w^{52} = Re(z).$$

En conclusión,

la parte real de $w^{52} + \sum_{i=0}^{25} w^{2i+1} = z$

es $\boxed{w^{52}}$

OK ¿Y CUÁNTO VALE w^{52}?

POST-PARCIAL

$w^{104} = (w^{52})^2 = 1$

$w^{52} = 1$ o -1

Pero 1 no puede ser (es primitiva)

$\Rightarrow w^{52} = -1$

NOTA

JONATHAN SEIJO | HOJA 5 | FECHA

③ a) Hallar un polinomio $F \in \mathbb{Q}[x]$ de grado mínimo que verifique simultaneamente:

- $gr(F:F') = 2$
- $1+i$ es raiz de F
- $x+1-\sqrt{5}$ divide a F en $\mathbb{C}[x]$

- Como los coeficientes de F son racionales ($\subset \mathbb{R}$), si $1+i$ es raiz de F, entonces $1-i$ también lo es.

- Si $(x+1-\sqrt{5})$ divide a F, reescribiendo tengo que $(x-(-1+\sqrt{5}))$ divide a F.

Como $F \in \mathbb{Q}[x]$ y 5 no es un cuadrado en $\mathbb{Q}$ (pues $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$) y como $(-1+\sqrt{5})$ es raiz (pues lo divide) entonces $(-1-\sqrt{5})$ también es raiz.

- Que el $gr(F:F') = 2$, significa que F y F' comparten raices. ~~comparten raices. en su grado~~

Es decir, hay raices en F que tienen multiplicidad > 1.

Como la multiplicidad de las raices baja en un grado al derivar, ~~aquellas que hay una raiz en F que tiene multiplicidad~~

puede que F tenga una raiz triple, o dos raices dobles.

. De las raices que encontré de F, si esta una está su conjugado, así que si una de ellas tiene multiplicidad 3, su conjugada tendría también multiplicidad 3, y $gr(F:F') = 4$, lo cual no cumple la condición.

$\boxed{\rightarrow}$ Continúa atrás.

NOTA

Si contiene otra raíz, por ejemplo $x=1$, que sea de multiplicidad 3, se cumple que $gr(F:F') = 2$.
Pero esto no cumpliría que F sea de grado mínimo, pues hay cuatro raíces $\neq$, más una de mult 3, $\Rightarrow gr(F) = 7$, y puedo encontrar un F mejor: (de grado 6)

· De las raíces que habría encontrado, si hay una, está su conjugado, si una de ellas es de multiplicidad 2, su conjugado también lo será, y el divisor cumple las condiciones.
Ejemplo de lo que intento explicar:

Si: $F(x) = (x-a_1)^2 (x-a_2)^2 (x-b_1)(x-b_2)$ (No estoy haciendo la derivación, solo mostrando cómo quedaría el polinomio)

$F'(x) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots$

y $(F:F') = (x-a_1)(x-a_2)$, cuyo grado es 2.

Entonces, un posible F que verifique todas las condiciones, de grado mínimo, es:

$$F = (x-(1+i))^2 (x-(1-i))^2 (x-(-1+\sqrt{5}))(x-(-1-\sqrt{5}))$$

b) Factorizado en $\mathbb{C}[x]$, irreducibles de grado 1,

$$F = (x-(1+i))(x-(1-i))(x-(1+i))(x-(1+i))(x-(-1+\sqrt{5}))(x-(-1-\sqrt{5}))$$

Factorizado en $\mathbb{R}[x]$

$$F = (x^2-2x+2)(x^2-2x+2)(x-(-1+\sqrt{5}))(x-(-1+\sqrt{5})).$$

irreducibles, son de grado 2, y sus raíces $\notin \mathbb{R}$, son complejas.

irreducibles que son de grado 1.

Factorizado en $\mathbb{Q}[x]$:

$$F = (x^2-2x+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x-4).$$

los tres factores son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, ninguno de sus raíces pertenecen a $\mathbb{Q}$ (no tiene raíces en $\mathbb{Q}$)

Y TIENEN GRADO 2

NOTA

JONATHAN
SEIJO

HOJA 6

FECHA

④ Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\bar{z}^4 + z^2(z-2i)|z| = 0$$

$$z^2(2-2i)|z| = -\bar{z}^4$$

• $\boxed{z=0}$ es solución.

Para que dos numeros sean iguales, deben serlo en modulo y argumento.

$$|z^2(2-2i)|z|| = |-\bar{z}^4|$$

$$|z^2||2-2i||z| = |-1||\bar{z}^4|$$

$$|z|^2\sqrt{2^2+(-2)^2}\,|z| = |\bar{z}|^4$$

$$|z|^3\sqrt{8} = |z|^4 \quad \rightarrow \text{uso que } |z| = |\bar{z}|$$

$\boxed{z\neq 0}$

$$\boxed{\sqrt{8} = |z|}$$

$$\arg\left(z^2(2-2i)|z|\right) = \arg(-\bar{z}^4)$$

$$\arg(z^2) + \arg(2-2i) + \arg(|z|) = \arg(-\bar{z}^4) + 2k\pi$$

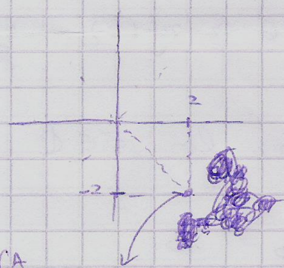
$$2\arg(z) + \frac{7}{4}\pi = \arg(-1) + \arg(\bar{z}^4) + 2k\pi$$

$$2\arg(z) + \frac{7\pi}{4} = \pi + 4\arg(\bar{z}) + 2k\pi$$

$$2\arg(z) + \frac{7}{4}\pi = \pi - 4\arg(z) + 2k\pi$$

$$6\arg(z) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\arg(z) = \frac{-3\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6}$$



ICA

$\frac{7\pi}{4}$

$$\arg(2-2i) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\arg(|z|) = 0 \quad (|z| \in \mathbb{R})$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$$

~~argz~~ ~~arg~~

$$\boxed{\arg(z) = \frac{-3\pi}{24} + \frac{8k\pi}{24}}$$

$\boxed{\rightarrow}$ ir a otra

NOTA

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{-3}{24}\pi + \frac{8}{24}k\pi < 2\pi$$

$$\frac{3}{24} \leq \frac{8}{24}k < \frac{17}{8}$$

$$3 \leq 8k < 51$$

$$\frac{3}{8} \leq k < \frac{51}{8}$$

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\left(\arg(z) = \frac{-3}{24} + \frac{8k\pi}{24}\right)$$

$k = 1 \rightarrow \arg(z) = \frac{5}{24}\pi$

$k = 2 \rightarrow \arg(z) = \frac{13}{24}\pi$

$k = 3 \rightarrow \arg(z) = \frac{21}{24}\pi$

$k = 4 \rightarrow \arg(z) = \frac{29}{24}\pi$

$k = 5 \rightarrow \arg(z) = \frac{37}{24}\pi$

$k = 6 \rightarrow \arg(z) = \frac{45}{24}\pi$

Entonces, los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación son:

$$z_0 = 0$$
$$z_1 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{5}{24}\pi i}$$
$$z_2 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{13}{24}\pi i}$$
$$z_3 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{21}{24}\pi i}$$
$$z_4 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{29}{24}\pi i}$$
$$z_5 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{37}{24}\pi i}$$
$$z_6 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{45}{24}\pi i}$$

NOTA