PROMOCIONA

TEMA 2

1	2	3	4	Calificación
B	B	B/R+	B/R	A

$\boxed{8}$

Apellido y Nombre: Tomas Lisazo **No. de Libreta:** 1783/21

Carrera: Lic. en Ciencias de la Computacion **Turno de Práctica:** 2

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre 2022 – Segundo Parcial – 29/11/22

---

1. Un kiosco que tiene un gran stock de sobres de figuritas del mundial ha decidido venderlos por caja con descuento. Hallar la cantidad de sobres que vienen en una caja sabiendo que tal cantidad es la misma en cada caja, que no supera los 300 sobres, y que

   - cuando 24 compañeros de trabajo compraron entre todos 5 cajas, al repartir los sobres en partes iguales sobraron 9,
   - cuando 28 compañeros de colegio compraron entre todos 2 cajas, al repartir los sobres en partes iguales sobraron 22.

2. Hallar **todos** los $p \in \mathbb{N}$ primos tales que

$$p \mid 3^{p+2} + 55^{2p-2} + 17.$$

3. Sea $d \in \mathbb{N}$ con $d \geq 2$. Sea $a \in \mathbb{C}$ y

$$f = X^{2d} - 6X^d + a \quad \in \ \mathbb{C}[X].$$

   a) Determinar todos los valores de a para los cuales f admite raíces múltiples.

   b) Para cada valor de a hallado, determinar la **cantidad** de raíces distintas de f y la multiplicidad de cada una de ellas.

4. Sea $f = X^4 + X^2 + X \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

   a) Hallar las raíces de f en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

   b) Factorizar f como producto de polinomios irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

TOMAS
LISAZO

Hoja 1
LU: 1783/21

① Llamo x a la cantidad de sobres por caja, con $0 \leq x \leq 300$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x \equiv 9\ (24) \\ 2x \equiv 22\ (28) \end{cases}$ ⟵ Tenemos este sistema

⇒ Para resolverlo, primero despejemos x en cada una.

$\Rightarrow 5x \equiv 9\ (24) \underset{5 \perp 24}{\longleftrightarrow} 25x \equiv 45\ (24) \Longleftrightarrow x \equiv 21\ (24)$

$\Rightarrow 2x \equiv 22\ (28) \underset{\text{coprimizo } \times 2}{\longleftrightarrow} x \equiv 11\ (14)$

⇒ Entonces,

$\begin{cases} 5x \equiv 9\ (24) \\ 2x \equiv 22\ (28) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 21\ (24) \\ x \equiv 11\ (14) \end{cases}$ ⟵ Analicemos la compatibilidad del sistema.

$\Rightarrow x \equiv 21\ (24) \longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 21\ (3) \\ x \equiv 21\ (8) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ (3) \\ x \equiv 5\ (8) \end{cases}$ ⟵ Con $3 \perp 8$ y $24 = 8 \cdot 3$

$\Rightarrow x \equiv 11\ (14) \longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 11\ (2) \\ x \equiv 11\ (7) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1\ (2) \\ x \equiv 4\ (7) \end{cases}$ ⟵ Con $2 \perp 7$ y $2 \cdot 7 = 14$

⇒ Todos los modulos son coprimos 2 a 2, salvo por 8 y 2. Veamos ese caso mas a fondo.

$\begin{cases} x \equiv 5\ (8) \Longleftrightarrow x \equiv 5\ (2) \Longleftrightarrow x \equiv 1\ (2) \\ x \equiv 1\ (2) \longleftarrow \ominus \end{cases}$ ⟵ El sistema es compatible

⇒ De ese modo,

$\begin{cases} 5x \equiv 9\ (24) \\ 2x \equiv 22\ (28) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ (3) \\ x \equiv 5\ (8) \\ x \equiv 4\ (7) \end{cases}$ ⟵ Todos los modulos son coprimos 2 a 2, por lo que segun el TCR, existe una unica solucion modulo $3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$

→ Resolvamos el sistema,

$$\begin{cases} x \equiv 0\ (3) \\ x \equiv 5\ (8) \\ x \equiv 4\ (7) \end{cases}$$

$\Rightarrow x \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow x = 3a,\ a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \equiv 5\ (8) \Longleftrightarrow 3a \equiv 5\ (8) \underset{3\perp 8}{\Longleftrightarrow} 9a \equiv 15\ (8) \Longleftrightarrow a \equiv 7\ (8)$

$\Rightarrow a \equiv 7\ (8) \Longleftrightarrow a = 8b + 7,\ b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 3a \Longleftrightarrow x = 3(8b+7) \Longleftrightarrow x = 24b + 21$

$\Rightarrow x \equiv 4\ (7) \Longleftrightarrow \underbrace{24b}_{\equiv 3} + \underbrace{21}_{\equiv 0} \equiv 4\ (7) \Longleftrightarrow 3b \equiv 4\ (7) \underset{5\perp 7}{\Longleftrightarrow} 15b \equiv 20\ (7)$

$\Rightarrow 15b \equiv 20\ (7) \Longleftrightarrow b \equiv 6\ (7) \Longleftrightarrow b = 7c + 6,\ c \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 24b + 21 \Longleftrightarrow x = 24(7c+6) + 21 \Longleftrightarrow x = 168c + 165$

$\Rightarrow x = 168c + 165 \Longleftrightarrow x \equiv 165\ (168) \longleftarrow$ Solucion del sistema

$\Rightarrow$ Como $x \equiv 165\ (168)$ y $0 \leq x < 300 \Longleftrightarrow \underline{x = 165}$

→ Finalmente, cada caja tenia 165 sobres de figuritas.

② $p \mid 3^{p+2} + 55^{2p-2} + 17$

Sabemos que si $p \mid 3^{p+2} + 55^{2p-2} + 17 \Longleftrightarrow 3^{p+2} + 55^{2p-2} + 17 \equiv 0\ (p)$

$\Rightarrow 3^{p+2} + 55^{2p-2} + 17 \equiv 0\ (p) \Longleftrightarrow 9 \cdot 3^{p} + (55^{p-1})^2 + 17 \equiv 0\ (p)$

→ Bien, sin conocer a p, no podemos hacer mucho mas.

TOMAS LISAZO

Hoja 2

LU:1783/21

$\Rightarrow$ Me percato de que si p tuviera ciertos valores, podría aplicar PTF. Probemoslos.

$\Rightarrow$ Supongo $p=3$

$\Rightarrow 9\cdot 3^p+(55^{p-1})^2+17\equiv 0\ (p) \iff 9\cdot 3^3+(55^{3-1})^2+17\equiv 0\ (3)$

$\Rightarrow \underbrace{9\cdot 3^3}_{\equiv 0}+(55^{3-1})^2+\underbrace{17}_{\equiv 2}\equiv 0\ (3) \overset{PTF}{\iff} 0+1^2+2\equiv 0\ (3) \iff 3\equiv 0\ (3) \iff 0\equiv 0\ (3)$

$55\perp 3$
3 primo $x^{p-1}\equiv 1\ (p)$

$\Rightarrow p$ puede ser 3

$\Rightarrow$ Supongo $p=5$

$\Rightarrow 9\cdot 3^p+(55^{p-1})^2+17\equiv 0\ (p) \iff 9\cdot 3^5+(55^{5-1})^2+17\equiv 0\ (5)$

$\Rightarrow 9\cdot 3^5+\underbrace{(55^{5-1})^2}_{\equiv 0}+\underbrace{17}_{\equiv 2}\equiv 0\ (5) \overset{PTF}{\iff} 9\cdot 3+0+2\equiv 0\ (5) \iff 2+2\equiv 0\ (5) \iff 4\equiv 0\ (5)$

$3\perp 5$
5 primo $x^p\equiv x\ (p)$

¡Absurdo!

$\Rightarrow p$ no puede ser 5.

$\Rightarrow$ Supongo $p=11$

$\Rightarrow 9\cdot 3^p+(55^{p-1})^2+17\equiv 0\ (p) \iff 9\cdot 3^{11}+(55^{11-1})^2+17\equiv 0\ (11)$

$\Rightarrow 9\cdot 3^{11}+\underbrace{(55^{11-1})^2}_{\equiv 0}+\underbrace{17}_{\equiv 6}\equiv 0\ (11) \overset{PTF}{\iff} 9\cdot 3+0+6\equiv 0\ (11) \iff 33\equiv 0\ (11) \iff 0\equiv 0\ (11)$

$3\perp 11$
11 primo $x^p\equiv x\ (p)$

$\Rightarrow p$ puede ser 11.

$\Rightarrow$ Ahora supongo p primo, $p\neq 3$, $p\neq 5$ y $p\neq 11$

$\Rightarrow 9\cdot 3^p+(55^{p-1})^2+17\equiv 0\ (p)$

$\Rightarrow 9\cdot 3^p+(55^{p-1})^2+17\equiv 0\ (p) \overset{PTF}{\iff} 9\cdot 3+1^2+17\equiv 0\ (p) \iff 45\equiv 0\ (p)$

$p\perp 3$, p primo, $x^p\equiv x\ (p)$
$p\perp 55$, p primo, $x^{p-1}\equiv 1\ (p)$

$\Rightarrow$ Si p es primo y $45\equiv 0\ (p) \Rightarrow p\in Div_+(45)$

$\Rightarrow Div_+(45)=\{3,5,9,15,45\} \underset{p\ primo}{\Longrightarrow} p\in\{3,5\}$

NOTA

$\Rightarrow$ Pero $p \neq 3$ y $p \neq 5 \rightarrow p \notin \{3, 5\} \leftarrow$ ¡Absurdo!

$\Rightarrow$ Finalmente, todos los p que cumplen la consigna son 3 y 11.

③ ⓐ $f = X^{2d} - 6X^d + a$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$

Si queremos que f tenga raices dobles, debemos buscar que raices comparte con f'.

$f = X^{2d} - 6X^d + a \Longrightarrow f' = 2dX^{2d-1} - 6dX^{d-1} \Longrightarrow f' = dX2(X^{2d-2} - \cancel{4}^{3} X^{d-2})$

~~$\Rightarrow f'$ tiene dos posibles raices: 0 y [illegible]. Especificamente, si $d=2$~~

~~f' tiene por raices [illegible] 0.~~

$\Rightarrow$ Este proceso, de sacar factor comun X lo podemos hacer hasta "gastar" los d.

$d \geq 2$

$\Rightarrow f' = 2dX(X^{2d-2} - 3X^{d-2}) \Longleftrightarrow f' = 2dX^2(X^{2d-3} - 3\underbrace{X^{d-3}}) \cdots f' = 2dX^d(X^d - 3)$

Hasta llegar a $d-d \Rightarrow X^0$

$\Rightarrow$ Entonces, tenemos 2 candidatos a raices multiples: 0 y $\sqrt[d]{3}$ $e^{\frac{2\pi i k}{d}}$

$k = 0, 1, 2, \ldots, d-1$

$\Rightarrow$ Probemos en f cuando funcionan.

$\Rightarrow f(0) = 0^{2d} - 6 \cdot 0^d + a \Rightarrow f(0) = a \leftarrow$ Si queremos 0 como raiz multiple, $a = 0$

$\Rightarrow f(\sqrt[d]{3}) = (\sqrt[d]{3})^{2d} - 6(\sqrt[d]{3})^d + a \Rightarrow f(\sqrt[d]{3}) = 3^2 - 6 \cdot 3 + a \Rightarrow f(\sqrt[d]{3}) = -9 + a$

$\Rightarrow f(\sqrt[d]{3}) = 0 \Longleftrightarrow -9 + a = 0 \Longleftrightarrow a = 9$

$\Rightarrow$ Finalmente, los posibles a son 0 y 9.

ⓑ Para $a = 0$

$f = X^{2d} - 6X^d \Rightarrow f = X^d \cancel{(X^2 - 6)}$ $(X^d - 6)$

$\Rightarrow f$ tiene 3 raices: $0, \sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$ $\rightarrow$ ARRASTRA ERROR

NOTA

Tomas Lisazo | Hoja 3
LU: 1783/21

$\Rightarrow$ A su vez, tenemos que

$mult(0, f) = d$

$mult(\sqrt{6}, f) = 1$

$mult(-\sqrt{6}, f) = 1$

$\Rightarrow$ Ahora, el caso $a = 9$.

$\Rightarrow f = X^{2d} - 6X^d + 9 \Longrightarrow f = (X^d)^2 - 6X^d + 9$

Llamemos K a $X^d \rightarrow K = X^d$

$\Rightarrow f = (X^d)^2 - 6X^d + 9 \Longrightarrow f = K^2 - 6K + 9 \longleftarrow$ ¡Una cuadratica!

Buscamos sus raices con la formula resolvente.

$\Rightarrow f = K^2 - 6K + 9 \Longleftrightarrow f = (K-3)^2 \Longleftrightarrow f = (X^d - 3)^2$

$\Rightarrow$ Entonces, f ahora tiene d raices: todos los $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^d = 3$

SON TODAS DISTINTAS

$mult(w_0, f) = 2$

$mult(w_1, f) = 2$

$mult(w_2, f) = 2$

$\vdots$

$mult(w_d, f) = 2$

$\Rightarrow$ Finalmente, f varia su cantidad de raices segun el a elegido.

NO RESPONDE LA CONSIGNA: CANTIDAD.

④ ⓐ $f = X^4 + X^2 + X \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$

Empecemos a factorizar

$\Rightarrow f = X^4 + X^2 + X \Longleftrightarrow f = X\underbrace{(X^3 + X + 1)}$

Busquemos estas raices

$\Rightarrow x^3+x^0+1$

Como estamos en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, solo hay 3 candidatos a raíces. Evaluemos

$x=0$

$\Rightarrow 0^3+0+1 \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 1 \equiv 0\ (3) \longleftarrow$ Absurdo

$x=1$

$\Rightarrow 1^3+1+1 \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 3 \equiv 0\ (3) \longleftarrow$ Una raíz

$x=2$

$\Rightarrow 2^3+2+1 \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 11 \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 2 \equiv 0\ (3) \longleftarrow$ Absurdo.

$\Rightarrow$ Dividamos por $x-1$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x-1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2+x+2 \\ 0+x^2+x & \\ -x^2-x & \\ 0+2x+1 & \\ -2x-2 & \\ 0+3 \equiv 0\ (3) & \end{array}$$

$\Rightarrow f = x\,(x-1)\,\underbrace{(x^2+x+2)}$

$\Rightarrow$ Probemos otra vez, a ver si 1 es raíz doble

$\Rightarrow x^2+x+2 \overset{x=1}{\Longrightarrow} 1^2+1+2 \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 4 \equiv 0\ (3) \Longleftrightarrow 1 \equiv 0\ (3) \longleftarrow$ Absurdo.

$\Rightarrow$ Finalmente, las raíces de f en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ son 0 y 1.

?

(b) $f = \underbrace{x}\,\underbrace{(x-1)}\,(x^2+x+2) \longleftarrow$ Analicemos este. Su determinante es

Son grado 1. $\Delta = 1-4\cdot1\cdot2 \Rightarrow \Delta = -7 \Rightarrow$ raíces $\notin \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Finalmente, f factorizado como producto de irreducibles quedaría

$f = x(x-1)(x^2+x+2)$, en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

NO ESTÁ BIEN JUSTIF.

NOTA