Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (21-10-2021)

Nombre y apellido:

Libreta:

Carrera:

• Este examen resuelto (incluida la hoja de enunciados completada y firmada) debe ser escaneado y subido al campus virtual donde te matriculaste antes de venir.

• Declaro que aprobé los trabajos prácticos de esta materia en el cuatrimestre 1. del año 2

1	2	3	4	Nota

1. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ los vectores $(3, 2, a)$ y $(5, 5, 0)$, respectivamente ¿Para que valor de a el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es paralelo a $(1, -1, 1)$?

2. Determine los puntos de la superficie S de ecuación $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 75$, en los que el plano tangente a S es perpendicular a la recta de ecuaciones paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 3 + 8t$ y $z = 2 - 6t$.

3. Hallar el máximo de la función $f(x, y, z) = 2x - 3y + z$ sobre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$, y decir en que punto o puntos se alcanza. Dar el resultado de manera exacta.

4. Calcule
$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dV,$$
donde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 2 \quad \text{y} \quad -2 \leq z \leq 3\}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

1 $\quad$ Si $(3,2,a) \times (5,5,0) \ // \ (1,-1,1)$

$$\Leftrightarrow \quad (3,2,a)\times(5,5,0) = \lambda\,(1,-1,1)$$

Resuelvo el producto

$$(3,2,a)\times(5,5,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\cdot 1\cdot(2.0 - 5a) + \hat{j}\cdot(-1)\cdot(3.0 - 5a) + \hat{k}\cdot 1\cdot(15 - 10)$$

$$\Rightarrow (3,2,a)\times(5,5,0) = (-5a,\ 5a,\ 5)$$

$$\Rightarrow (-5a,\ 5a,\ 5) = \lambda\cdot(1,-1,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5a = \lambda \\ 5a = -\lambda \\ 5 = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5a = -\lambda = -5 \quad \Rightarrow a = -1$$

Corroboro en $-5a = 5$, $-5\cdot(-1) = 5$ ✓

$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

(2)- si el plano tangente a (x,y,z) es perpendicular a la recta $\lambda = t.(2,8,-6)+(1,3,2)$, entonces, $\nabla f(x,y,z)$ debe ser paralelo al vector director de λ

$\Rightarrow$ $\nabla f(x,y,z) = t(2,8,-6)$

y $\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$ y $\nabla f(x,y,z) = (2t, 8t, -6t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2t & \rightarrow x = t \\ 4y = 8t & \rightarrow y = 2x \\ 6z = -6t & \rightarrow z = -x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ los puntos son los generados por $(x, 2x, -x)$

Sin embargo, deben pertenecer a S, por lo que

$f(x, 2x, -x) = 75$

$$x^2 + 2.(2x)^2 + 3.(-x)^2 = 75$$

sii $x^2 + 8x^2 + 3x^2 = 75$

sii $12x^2 = 75$

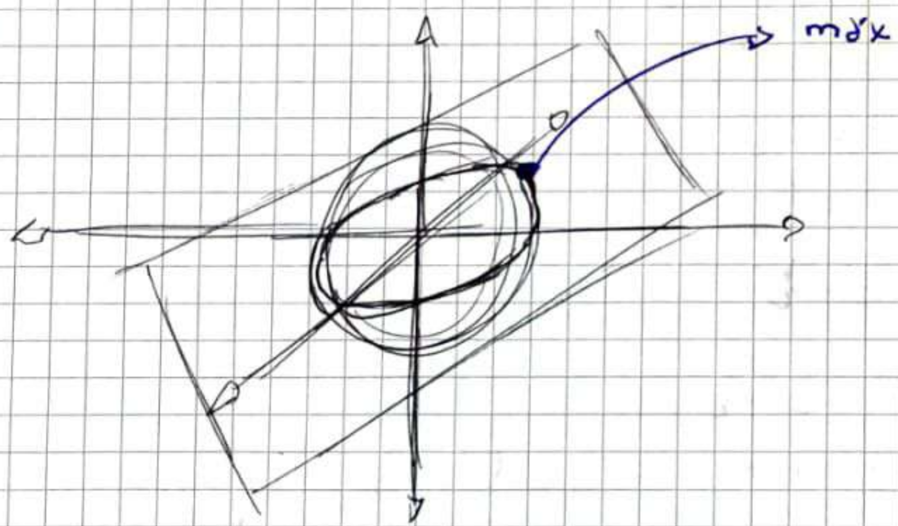
sii $x^2 = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}$

sii $x = \pm \frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sol: } \left\{\left(\tfrac{5}{2}, 5, -\tfrac{5}{2}\right), \left(-\tfrac{5}{2}, -5, \tfrac{5}{2}\right)\right\}}$

③ $f(x,y,z) = 2x - 3y + z$ → Plano inclinado en dirección al vector $(2,-3,1)$ que pasa por el $(0,0,0)$

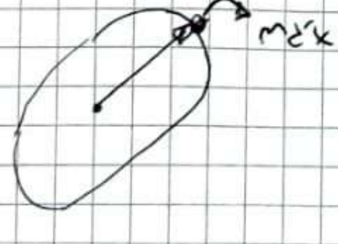
esfera $\mathcal{E}$: $x^2+y^2+z^2 = 7/2$ → esfera de radio $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ con centro en $(0,0,0)$

⇒ Interpretando geométricamente,



Como la esfera tiene centro en el $(0,0,0)$, y el plano pasa por el $(0,0,0)$, el punto máximo del plano en la esfera va a ser aquel que se encuentre en dirección del vector director del plano y que pase por la esfera.

Siendo $f \cap \mathcal{E}$:



⇒ El máximo en esta intersección será un punto de la recta $\lambda = t.(2,-3,1)$ que pertenezca a la esfera $\mathcal{E}$

⇒ Reemplazo en la ecuación de $\mathcal{E}$ con un punto genérico de $\lambda = (2t, -3t, t)$

$(2t)^2 + (-3t)^2 + t^2 = 7/2$

sii $4t^2 + 9t^2 + t^2 = 7/2$

sii $14t^2 = 7/2$

sii $2t^2 = 1/2$

sii $t^2 = 1/4$

sii $t = \pm 1/2$

⇒ los candidatos son $t = 1/2$, $(1, -3/2, 1/2) = P_1$

y $t = -1/2$, $(-1, 3/2, -1/2) = P_2$

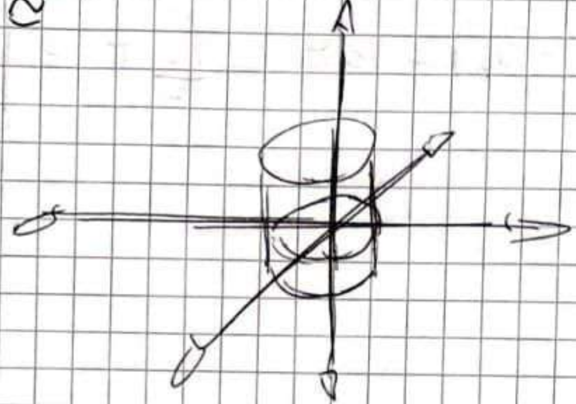
$f(P_1) = 2 + 9/2 + 1/2 = 7$

$f(P_2) = -2 - 9/2 - 1/2 = -7$

⇒ $\boxed{máx = P_1 = (1, -3/2, 1/2)}$

(4) $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\, dV$ $\quad R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2 \text{ , } -2 \leq z \leq 3\}$

R es un cilindro de radio $\sqrt{2}$, con altura desde $-2 \leq z \leq 3$



Hago reemplazo, $x = r\cos\theta$ $\quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$J = r$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3} r.\left(r^2\cos^2\theta + r^2 \text{se}^2\theta + z^2\right) dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3} r.(r^2+z^2)\, dz\, d\theta\, dr = \int_0^{\sqrt{2}}\int_{-2}^{3} r^3 + rz^2 \int_0^{2\pi} 1\, d\theta\, dz\, dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_{-2}^{3} 2\pi.(r^3+rz^2)\, dz\, dr = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-2}^{3} r^3+rz^2\, dz\, dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\int_{-2}^{3} r^2+z^2\, dz\, dr = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r.\left(r^2 z + \frac{z^3}{3}\Big|_{-2}^{3}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r \cdot \left(3r^2 + 9 + 2r^2 + 8/3\right) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 5r^3 + \frac{35}{3} r \, dr$$

$$= 10\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 + 7/3 r \, dr = 10\pi \cdot \left(\frac{r^4}{4} + \frac{7r^2}{6} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 10\pi \cdot \left(1 + 7/3\right) = 10\pi + \frac{70}{3}\pi = \boxed{\frac{100\pi}{3} \simeq 104,72}$$