Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)
Examen Final (15-12-2021) Resuelto

1. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y) = xg\big(\frac{y}{x}\big)$. Pruebe que todo plano tangente al gráfico de f pasa por el origen.

   Solución: Notemos que f es diferenciable porque es producto, cociente y composición de funciones diferenciables. Además, por la regla de la cadena y las reglas para derivadas de productos y cocientes, es cierto que

   $$f_x(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) - xg'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2} = g\left(\frac{y}{x}\right) - g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

   y

   $$f_y(x,y) = xg'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = g'\left(\frac{y}{x}\right).$$

   Por lo tanto el plano T, tangente al gráfico de f en un punto arbitrario $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ tiene ecuación

   $$\begin{aligned} T(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0.y_0)(x-x_0) + f_y(x_0.y_0)(y-y_0) \\ &= x_0 g\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \left(g\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - g'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right)(x-x_0) + g'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0). \end{aligned}$$

   Evaluando ahora T en $(0,0)$, obtenemos

   $$\begin{aligned} T(0,0) &= x_0 g\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \left(g\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - g'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right)(0-x_0) + g'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(0-y_0) \\ &= x_0 g\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - g\left(\frac{y_0}{x_0}\right)x_0 + g'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y_0 - g'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

   lo que prueba que T pasa por el origen.

2. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, y sea

   $$f(x,y,z) = \int_{x+z^2}^{x^2+y} g(t)\, dt.$$

   Pruebe que

   $$2z\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4xz\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

   para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   Solución: Por el Teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

   $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2xg(x^2+y) - g(x+z^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= g(x^2+y) \end{aligned}$$

   y

   $$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2zg(x+z^2).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}2z\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 4xzg(x^2+y) - 2zg(x+z^2)\\ &= 4xz\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z),\end{aligned}$$

cómo queremos.

3. Sea S una esfera metálica de radio 2. Suponga que el centro de S está en el origen y que la temperatura $T(x,y,z)$, en cada punto (x,y,z) de S, está dada por $T(x,y,z) = xy^2z$ (en grados Celsius). Determine los puntos de S en los que la temperatura es máxima, y los puntos en los que es mínima. Además, calcule estas temperaturas.

   Solución: Sea $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+z^2 \leq 4\}$ el disco cerrado con centro en el origen y radio 2. Reemplazando y^2 por $4-x^2-z^2$ en T, obtenemos la función $h\colon D \to \mathbb{R}$, definida por

   $$h(x,z) = x(4-x^2-z^2)z = 4xz - x^3z - xz^3.$$

   Notemos que h se anula en el borde de D. Busquemos los puntos críticos en el interior. Cómo

   $$h_x(x,z) = 4z - 3x^2z - z^3 \quad \text{y} \quad h_z(x,z) = 4x - x^3 - 3xz^2,$$

   un punto (x,z) del interior de D es un punto crítico de h si y sólo si

   $$(4-3x^2-z^2)z = 0 \quad \text{y} \quad x(4-x^2-3z^2) = 0.$$

   Una solución es $(x,z) = (0,0)$. Si $x \neq 0$ y $z = 0$, entonces de la segunda ecuación se sigue que $x = \pm 2$. Si $x = 0$ y $z \neq 0$, entonces de la primera ecuación se sigue que $z = \pm 2$. Resta ver que pasa cuándo x y z son no nulos. En este caso (x,z) es un punto crítico si y sólo si

   $$4-3x^2-z^2 = 0 \quad \text{y} \quad 4-x^2-3z^2 = 0.$$

   Multiplicando la primera ecuación por 3 y restándole la segunda, obtenemos

   $$8-8x^2 = 0,$$

   y, por lo tanto, $x = \pm 1$ y $z = \pm 1$. Resumiendo, los puntos críticos en el interior de D son: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ y $(-1,-1)$ (los puntos $(0,\pm 2)$ y $(\pm 2, 0)$ no están en el interior de D). Ahora un cálculo directo muestra que

   $$h(0,0) = 0, \quad h(1,1) = h(-1,-1) = 2 \quad \text{y} \quad h(1,-1) = h(-1,1) = -2.$$

   Además, h se anula en el borde de D. Así, T alcanza su mínimo -2 en los 4 puntos $\pm(1,\pm\sqrt{2},-1)$, y T alcanza su máximo 2 en los 4 puntos $\pm(1,\pm\sqrt{2},1)$.

4. Calcular el volumen del cuerpo acotado interior al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 4$.

   Solución: Tenemos que calcular el volumen $V(R)$ de

   $$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \text{ y } 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$$

   Vamos a resolver el ejercicio usando coordenadas esféricas. Recordemos que si (r,ϕ,θ) son las coordenadas esféricas de un punto P, entonces r es la distancia de $\overrightarrow{OP}$ al origen,

$0 \leq \phi \leq \pi$ es el ángulo entre $(0,0,1)$ y (r,ϕ,θ), y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es el ángulo entre $(1,0,0)$ y la proyección ortogonal de $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano xy. Un punto (x,y,z) pertenece a R si y solo si sus coordenadas polares (r,ϕ,θ) satisfacen

$$\begin{array}{ll} 1 \leq r \leq 2, & \text{porque } 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, & \text{porque } (x,y,0) \text{ puede estar en cualquier cuadrante,} \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4, & \text{porque si } z = \sqrt{x^2+y^2}, \text{ el ângulo entre } (0,0,z) \text{ y } (x,y,z) \text{ es } \pi/4. \end{array}$$

Por lo tanto, como el Jacobiano del cambio de variables es $r^2 \operatorname{sen}(\phi)$, tenemos

$$V(R) = \iiint_R 1\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, dr d\phi d\theta = 2\pi \left(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi \right) \left(\int_1^2 r^2\, dr \right).$$

Para terminar la resolución del ejercicio resta calcular $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi$ y $\int_1^2 r^2\, dr$. Pero

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi = -\cos(\phi)\Big|_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

y

$$\int_1^2 r^2\, dr = \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Así,

$$V(R) = 2\pi \times \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3}(2-\sqrt{2})\pi.$$