Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Segundo parcial (1/07/2023) - 1er. C. 2023

TEMA 4

Nota de promo
10 (diez)

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	~~B~~ B=	B	B−	9 (nueve)

Apellido: Martínez | Nro. de libreta: 363/23 | Nro de práctica: 2

Nombre: Fausto Nicolás | Carrera: Licenciatura en Ciencias de Datos

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

---

1. Sea g una función de clase C^2 cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(2,2)$ es

$$T_g(x,y) = -3 - x + y + y^2.$$

a) Decidir si existe el siguiente límite, y en caso afirmativo calcularlo

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{g(x,y) + 3 + x - y - y^2 + (x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

b) Suponiendo que $g(x,y) = e^{f(x,y)}$ con f una función de clase C^2. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ centrado en $(2,2)$.

---

2. Dada $f(x,y) = 4 \,.\, e^{x^2+y^2-6y}$.

a) Hallar extremos relativos y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar, si existen, los extremos absolutos de f restringidos a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\, 2y + x^2 \leq 9\right\}.$$

---

3. Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las curvas $y^2 = x + 5$; $y^2 = 7 - x$.

a) Dibujar la región y calcular su área..

b) Calcular la integral

$$\iint_D \frac{xy}{2}\, dA.$$

---

4. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 , x \leq 0 , y \leq 0 , z \geq 0\}$ calcular la integral triple:

$$\iiint_W \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

Fausto Martínez - Hoja 1

1) a) Por propiedad del polinomio de Taylor, se que

$$\frac{g(x,y) - T_g(x,y)}{(x-2)^2+(y-2)^2} = 0$$

, luego me piden calcular

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{g(x,y) - T_g(x,y) + (x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \cancel{\frac{g(x,y) - T_g(x,y)}{(x-2)^2+(y-2)^2}}^{\,0} + \frac{(x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2} =$$

Para trabajar más cómodo efectúo el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} s = x-2 \\ t = y-2 \end{cases}$$

, luego cuando $(x,y)\to(2,2)$, $(s,t)\to(0,0)$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s\cdot t^3}{s^2+t^2}$$

Aquí hago un límite iterado.

$$\lim_{s\to 0}\left(\lim_{t\to 0} \frac{s\cdot t^3}{s^2+t^2}\right) = \lim_{s\to 0} 0 = 0.$$

Como ya sospecho que el límite vale 0, intento probarlo por sandwich

$$\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{s\cdot t^3}{s^2+t^2}\right| = \frac{|s|\cdot|t|^3}{s^2+t^2}$$

, usando que $|s| \leq \sqrt{s^2+t^2}$, $|t| \leq \sqrt{s^2+t^2}$ veo que

$$\frac{|s||t|^3}{s^2+t^2} \leq \frac{\sqrt{s^2+t^2}\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)^3}{s^2+t^2} = \frac{(s^2+t^2)^2}{s^2+t^2} = s^2+t^2$$

, que, como $(s,t)\to(0,0)$, tiende a 0, luego

$$0 \leq \left|\frac{s\cdot t^3}{s^2+t^2}\right| \leq \underbrace{s^2+t^2}_{\to 0}$$

que tiende a 0,

entonces, puedo afirmar que el límite existe y vale 0.

Por consiguiente el original también vale 0, entonces

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{g(x,y)+3+x-y-y^2+(x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2} \text{ existe y vale } 0}$$

Respuesta

ⓑ Como f es C^2, puedo afirmar que es diferenciable ella y f_x, f_y, lo que me permite hacer los calculos con tranquilidad.

$\Rightarrow \cdot\ g_x(x,y) = e^{f(x,y)} \cdot f_x(x,y)$

$\cdot\ g_y(x,y) = e^{f(x,y)} \cdot f_y(x,y)$

$\cdot\ g_{xx}(x,y) = e^{f(x,y)}\left[[f_x(x,y)]^2 + f_{xx}(x,y)\right]$

$\cdot\ g_{xy}(x,y) = e^{f(x,y)}\left[f_x(x,y) \cdot f_y(x,y) + f_{xy}(x,y)\right]$

$\cdot\ g_{yy}(x,y) = e^{f(x,y)}\left[[f_y(x,y)]^2 + f_{yy}(x,y)\right]$

Luego el Taylor de orden 2 centrado en $(2,2)$ de g era $T_g(x,y) = -3 - x + y + y^2$. Ahora, sabiendo que

$$\begin{cases} T_g(2,2) = g(2,2) \\ \nabla T_g(2,2) = \nabla g(2,2) \\ H T_g(2,2) = H g(2,2) \end{cases}$$

Puedo calcular todos los valores de g en $(2,2)$ y sus derivadas

C. Aux.

$(T_g)_x = -1$

$(T_g)_y = 1 + 2y$

$(T_g)_{xx} = 0$

$(T_g)_{xy} = 0$

$(T_g)_{yy} = 2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & g(2,2) = 1 \\ & g_x(2,2) = -1 \\ & g_y(2,2) = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ & g_{xx}(2,2) = 0 \\ & g_{xy}(2,2) = 0 \\ & g_{yy}(2,2) = 2 \end{aligned}$$

Luego $g(2,2) = e^{f(2,2)}$

$1 = e^{f(2,2)} \Leftrightarrow \boxed{f(2,2) = 0}$

$g_x(2,2) = e^0 \cdot f_x(2,2) \Leftrightarrow -1 = 1 \cdot f_x(2,2) \Leftrightarrow \boxed{f_x(2,2) = -1}$

$g_{xx}(2,2) = e^0 \cdot \left((-1)^2 + f_{xx}(2,2)\right) \Leftrightarrow 0 = 1(1 + f_{xx}(2,2)) \Leftrightarrow \boxed{f_{xx}(2,2) = -1}$

$g_y(2,2) = e^0 \cdot f_y(2,2) \Leftrightarrow 5 = e^0 \cdot f_y(2,2) \Leftrightarrow \boxed{f_y(2,2) = 5}$

$g_{yy}(2,2) = e^0 \cdot \left[5^2 + f_{yy}(2,2)\right] \Leftrightarrow 2 = 25 + f_{yy}(2,2) \Leftrightarrow \boxed{f_{yy}(2,2) = -23}$

$g_{xy}(2,2) = e^0 \cdot \left[5 \cdot 1 + f_{xy}(2,2)\right] \Leftrightarrow 0 = 5 + f_{xy}(2,2) \Leftrightarrow \boxed{f_{xy}(2,2) = -5}$

Fausto Martínez - Hoja 2

Luego el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $(2,2)$ de f es

$$T_f(x,y) = f(2,2) + f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(y-2) + \frac{f_{xx}(2,2)(x-2)^2}{2} + f_{xy}(2,2)(x-2)(y-2) + \frac{f_{yy}(2,2)(y-2)^2}{2}$$

$$\boxed{T_f(x,y) = -(x-2) + 5(y-2) - \frac{(x-2)^2}{2} - 5(x-2)(y-2) - \frac{23(y-2)^2}{2}}$$

Respuesta.

2) Para hallar extremos relativos y puntos silla primero debo encontrar puntos críticos, es decir, los (x,y) tales que $\nabla f(x,y) = (0,0)$

Busco $\nabla f(x,y) \Rightarrow$

$$f_x(x,y) = 4e^{x^2+y^2-6y} \cdot 2x = 8x e^{x^2+y^2-6y}$$

$$f_y(x,y) = 4e^{x^2+y^2-6y} \cdot (2y-6) = (8y-24)\, e^{x^2+y^2-6y}$$

Entonces un punto es crítico si se cumple que

$$\begin{cases} 8x e^{x^2+y^2-6y} = 0 \iff \boxed{x=0} \\ (8y-24) e^{x^2+y^2-6y} = 0 \iff 8y-24=0 \iff \boxed{y=3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Mi único punto crítico es $P_1 = (0,3)$, para ver qué es uso el criterio del Hessiano

- $f_{xx} = 8e^{x^2+y^2-6y}(1+2x^2)$
- $f_{xy} = 8x e^{x^2+y^2-6y} \cdot (2y-6) = (16xy - 48x)e^{x^2+y^2-6y}$
- $f_{yy} = 8e^{x^2+y^2-6y} + (8y-24)\, e^{x^2+y^2-6y} \cdot (2y-6) =$

$$8e^{x^2+y^2-6y} + (16y^2 - 48y - 48y + 144)\, e^{x^2+y^2-6y}$$

$$= e^{x^2+y^2-6y}(16y^2 - 96y + 152)$$

Luego $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 8e^{x^2+y^2-6y}(1+2x^2) & (16xy-48x)e^{x^2+y^2-6y} \\ (16xy-48x)e^{x^2+y^2-6y} & (16y^2-96y+152)e^{x^2+y^2-6y} \end{pmatrix}$

Entonces $Hf(0,3) = \begin{pmatrix} 8e^{-9} & 0 \\ 0 & 8e^{-9} \end{pmatrix}$

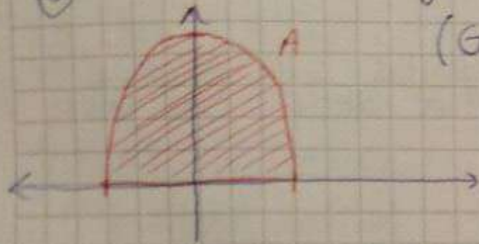
$\Rightarrow \det(Hf(0,3)) = 64e^{-18}$ $\boxed{>0}$ $\rightarrow$ Entonces el punto $(0,3)$ es un mínimo local por el criterio del Hessiano

$\wedge\ f_{xx}(0,3) = 8e^{-9}$ $\boxed{>0}$ $\rightarrow$

El punto $(0,3)$ es el único extremo relativo y es un mínimo local

Respuesta.

(b) A es un conjunto algo así:



(Gráfico aproximado)

Luego, como vemos que es compacto (cerrado y acotado) y f es una función continua, puedo afirmar que vale el Teorema de Weierstrass. Busco ahora candidatos.

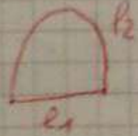
<u>En el interior de A</u>

Ya vimos que $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,3)$

$y\ (0,3) \in A$ pues $2\cdot 0 + 3^2 \leq 9$ ✓

Luego, mi primer candidatos es $\boxed{P_1 = (0,3)}$

<u>En los bordes de A</u>



$(t,0)$

Voy a parametrizar ℓ_1 como $r_1(t) = (0,t)$ con $t \in [-3,3]$

Luego debo analizar $g_1(t) = f(r_1(t)) = 4e^{t^2}$ → esto es $f(t,0)$

¿Esta función tiene puntos críticos? Veamos.

$g_1'(t) = 4e^{t^2}\cdot 2t$. Esto es igual a $0 \Leftrightarrow \boxed{t=0}$

No me puedo olvidar de agregar los extremos como candidatos, luego obtengo

$\boxed{P_2 = (0,0)}$ $\boxed{P_3 = (0,-3)}$ y a $(0,3)$ ya lo había tenido en cuenta como candid

$t=0$ $t=-3$

Mal, este no está en A.

Fausto Martínez - Hoja 3

Ahora para ℓ_2, como no veo que sea fácil de parametrizar intentaré usar el método de los Multiplicadores de Lagrange

Veo ℓ_2 como restricción funcional, sea $g(x,y) = 2y + x^2$

Luego $g(x,y) = 9$ describe el borde ℓ_2

$\nabla g(x,y) = (2x, 2) \neq (0,0) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

Puedo usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Planteo:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x e^{x^2+y^2-6y} = \lambda 2x & ① \\ (8y-24) e^{x^2+y^2-6y} = 2\lambda & ② \\ 2y + x^2 = 9 & ③ \end{cases}$$

Luego, de ② veo que $\lambda = (4y-12) e^{x^2+y^2-6y}$

y de ① Asumiendo $x \neq 0$ $\lambda = 4 e^{x^2+y^2-6y}$

$\Rightarrow \lambda = \lambda \iff 4y - 12 = 4 \iff 4y = 16 \iff \boxed{y = 4}$

~~Me queda el sistema~~ Reemplazando en ③ veo que

③ $8 + x^2 = 9 \iff x^2 = 1 \iff \boxed{x = 1}$ o $\boxed{x = -1}$

$\Rightarrow$ Obtengo $\boxed{P_4 = (1,4)}$, $\boxed{P_5 = (-1,4)}$

Deshaciendo la suposición de que $x \neq 0$ Veo que si $x = 0$

En ③ $2y = 9 \iff \boxed{y = 9/2}$

$\Rightarrow$ Obtengo $\boxed{P_6 = (0, 9/2)}$

Ahora, el Teorema de Weierstrass nos asegura que evaluando la función en estos candidatos encontraremos los máximos y mínimos absolutos de f restringida por A, y estos serán el valor máximo y mínimo que tome f en los candidatos. Evalúo

$f(P_1) = f(0,3) = 4e^{-9}$, $f(P_6) = f(0, 9/2) = 4e^{-27}$

$f(P_2) = f(0,0) = 4$

$f(P_3) = f(0,-3) = 4e^{27}$

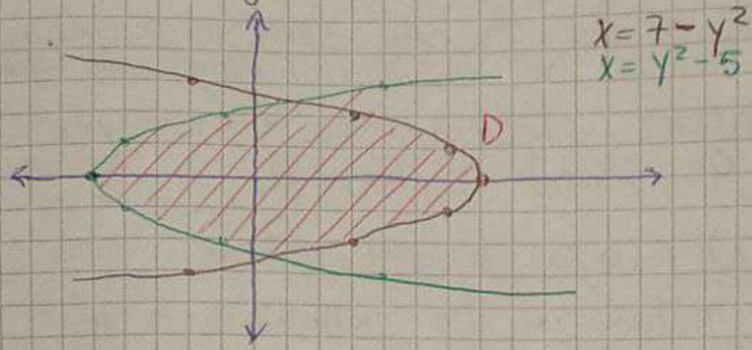
$f(P_4) = f(1,4) = 4e^{-7}$

$f(P_5) = f(-1,4) = 4e^{-7}$

Luego, f alcanza su max absoluto, $4e^{27}$ en $P_3 = (0,-3)$ y su mín absoluto, $4e^{-27}$ en $P_6 = (0, 9/2)$ (restringida por A) Rta

③ ⓐ D es la region entre las parabolas $x = y^2 - 5$ y $x = 7 - y^2$

Es algo así:



Para ver donde se cortan, planteo $7 - y^2 = y^2 - 5$

$\iff 12 = 2y^2 \iff 6 = y^2 \iff \boxed{y = \sqrt{6}}$ o $\boxed{y = -\sqrt{6}}$

Entonces puedo afirmar que

$$y^2 - 5 \leq x \leq 7 - y^2$$
$$-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$$

Luego para calcular el área, debo calcular

$$\text{Area}(D) = \iint_D dA = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{y^2-5}^{7-y^2} dx\,dy = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} x \Big|_{x=y^2-5}^{x=7-y^2} dy$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 12 - 2y^2\, dy = 2\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 6 - y^2 = 2 \cdot \left[6y - \frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\left(6\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}^3}{3} \right) - \left(-6\sqrt{6} - \frac{(-\sqrt{6})^3}{3} \right) \right] =$$

$$= 2 \cdot \left[12\sqrt{6} - \frac{2(\sqrt{6})^3}{3} \right] = \boxed{24\sqrt{6} - \frac{4}{3}(\sqrt{6})^3}$$

Respuesta.

ⓑ $$\iint_D \frac{xy}{2}\, dA = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{y^2-5}^{7-y^2} xy\, dx\, dy =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \frac{x^2}{2} \cdot y \Big|_{x=y^2-5}^{x=7-y^2} dy = \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[(7-y^2)^2 - (y^2-5)^2 \right] \cdot y\, dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[(49 - 14y^2 + y^4) - (y^4 - 10y^2 + 25) \right] \cdot y\, dy =$$

Fausto Martínez - Hoja 4

$$= \frac{1}{4}\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} [-4y^2+24]\, y\, dy = \frac{1}{4}\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 24y - 4y^3\, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 6y - y^3\, dy = 3y^2 - \frac{y^4}{4}\Big|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = (18-9) - ((18)-9)$$

$$= \boxed{0}$$ Respuesta.

(4) Como veo que W es una porción de esfera, sospecho que me va a convenir usar coordenadas esféricas, recordemos:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad |Jac| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \qquad \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0,\pi] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{matrix}$$

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2$$

Luego, como $1/4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$, puedo deducir que $1/4 \leq \rho^2 \leq 9$ y como $\rho \geq 0$, $\Rightarrow$

$$\boxed{1/2 \leq \rho \leq 3}$$

Mal en la consigna $x \leq 0$ $y \leq 0$

Luego, de $x \geq 0$, $y \geq 0$ es fácilmente deducible que $\theta \in [0,\pi/2]$ pues es el único intervalo donde tanto el coseno como el seno de θ son positivos, el primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \theta \leq \pi/2}$$

De la misma manera, con $z \geq 0$, deduzco que $\varphi \in [0,\pi/2]$ pues es el único subintervalo del intervalo $[0,\pi]$ al cual está restringido φ, en donde el $\cos\varphi$ es positivo

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \varphi \leq \pi/2}$$

(Ambas deducciones previas son fáciles de ver imaginando un gráfico de W, pero no me veo capaz de graficar con precisión la superficie) ok

Luego $\iiint_W \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV =$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_{1/2}^{3} \frac{3\rho\, sen\varphi\, sen\theta\, \rho\cos\varphi}{(\rho^2)^2} \cdot \rho^2 sen\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_{1/2}^{3} \frac{\cancel{\rho^4}\, sen^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot sen\theta}{\cancel{\rho^4}}\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 3\cdot \overbrace{(3-1/2)}^{\circledast} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} sen^2\varphi \cos\varphi\, sen\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{15}{2}\int_0^{\pi/2} sen^2\varphi \cos\varphi \left(-\cos\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\right) d\varphi$$

$$= \frac{15}{2}\cdot\left(0-(-1)\right)\cdot \int_0^{\pi/2} sen^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi$$

C. Aux.: Busco primitiva de $sen^2\varphi \cdot \cos\varphi$

Sea $t = sen\,\varphi$
$dt = \cos\varphi\, d\varphi$ $\Rightarrow \int sen^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \int t^2 \cdot dt$
$= \frac{t^3}{3} + C = \boxed{\frac{sen^3(\varphi)}{3} + C}$

$$= \frac{\cancel{15}^{\,5}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_{\,1}}\, sen^3(\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{5}{2}\cdot(1-0) = \boxed{\frac{5}{2}}$$ Respuesta

$\circledast$ Ahí uso una propiedad que varias veces mencionó la profesora. Que cuando no está la variable respecto a la que integramos multiplicamos por la longitud del intervalo. ✓

coherente con el error