Primer parcial - 1er cuat. 2020 - Álgebra 1

Ejercicio 1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 200\}$. Se define la relación $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x)$ de la siguiente forma:

$$A\mathcal{R}B \iff \quad B \subseteq A - \{2,4\}$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de orden y/o de equivalencia.

(b) Hallar la cantidad de elementos B de $\mathcal{P}(x)$ tales que $A\mathcal{R}B$ para todo $A \in \mathcal{P}(x)$.

Solución. Esta relación que define el ejercicio nos pide que nos fijemos si un conjunto B es subconjunto de otro conjunto A (siendo estos a su vez subconjuntos de $X = \{1, 2, ..., 200\}$) con una salvedad: el 2 y el 4 no pueden ser elementos de B. Si lo fueran, como los estoy sacando de consideración cuando hago la resta de conjuntos, ese B no podría estar relacionado con un conjunto A dado, nunca (ya que B los tendría pero $A - \{2,4\}$ nunca los va a tener).

- *Reflexividad.* Veamos que la relación no es reflexiva. Tomando por ejemplo $A = \{1,2,3\}$ se ve que $A - \{2,4\} = \{1,3\}$ y por lo tanto $A \nsubseteq A - \{2,4\}$. El ejemplo no es único. Notemos que cualquier A que tenga como elementos al 2 o al 4 sirve. Si estos no pertenecen al conjunto, entonces $A = A - \{2,4\}$ y por lo tanto $A\mathcal{R}A$.
- *Simetría.* Veremos con un ejemplo que la relación tampoco es simétrica. Sean $A = \{1,2\}$ y $B = \{1\}$. Vale que $A - \{2,4\} = \{1\}$ y entonces $B \subseteq A - \{2,4\}$, pero $B - \{2,4\} = \{1\}$ y entonces $A \nsubseteq B - \{2,4\}$. Es decir, $A\mathcal{R}B$ pero $B \not\mathcal{R} A$.
- *Antisimetría.* Sean A, B tales que $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}A$. Es decir, $B \subseteq A - \{2,4\}$ y $A \subseteq B - \{2,4\}$. Pero entonces $B \subseteq A - \{2,4\} \subseteq A$ (porque $A - \{2,4\}$ en particular es un subconjunto de A), y por transitividad, $B \subseteq A$. Análogamente, $A \subseteq B - \{2,4\} \subseteq B$ implica $A \subseteq B$. Como vale la doble inclusión, vale la igualdad $A = B$, y la relación es antisimétrica.
- *Transitividad.* Sean A, B, C tales que $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}C$. Como antes, $B \subseteq A - \{2,4\}$ y $C \subseteq B - \{2,4\}$. Entonces valdrá que $C \subseteq B - \{2,4\} \subseteq B \subseteq A - \{2,4\}$ (la primera y tercera inclusión por hipótesis de la relación, la segunda porque $B - \{2,4\}$ en particular es un subconjunto de B) . Por transitividad, $C \subseteq A - \{2,4\}$, y entonces $A\mathcal{R}C$. La relación es transitiva.
- *Relación de orden.* Como la relación no es reflexiva, no será una relación de orden.
- *Relación de equivalencia.* Como la relación no es reflexiva (ni simétrica), no será una relación de equivalencia.

Para la segunda parte del ejercicio, tenemos que tener en cuenta que nos piden hallar cuántos conjuntos B hay que cumplen no estar relacionados con ningún A a la vez. O sea, no hay que buscar un B para un A dado, si no, conseguir que la relación falle siempre.

Considerando lo que mencionamos al principio, la clave está en los elementos 2 y 4. Supongamos que B no tiene como elementos a ninguno de estos dos números. Entonces, B tiene como posibles elementos a los números 1, 3 o los del 5 al 200. Por lo tanto, $B \subseteq \{1,3,5,...,200\}$ (no estamos diciendo que tenga todos esos números. Sólo que seguro no tiene al 2 y al 4. Podría no tener ninguno y ser vacío). Si tomamos como posible A al conjunto X, a todo el conjunto de referencia, observamos que $\{1,3,5,...,200\} = X - \{2,4\}$. Entonces, si B no tiene ni al 2 ni al 4 como elementos, existe un conjunto con el que se relaciona, que es X, porque $B \subseteq \{1,3,5,...,200\} = X - \{2,4\}$.

Por otro lado, si por ejemplo $2 \in B$, entonces $B \not\mathcal{R} A$ para todo $A \subseteq X$. La negación de $B \subseteq A - \{2,4\}$ es que exista $x \in B$ tal que $x \notin A - \{2,4\}$. Y justamente, $2 \in B$, pero $2 \in A - \{2,4\}$ (sin importar si $2 \in A$ o no. Cuando hacemos la resta de conjuntos lo estamos sacando). El mismo argumento valdría si $4 \in B$.

Entonces, si queremos un conjunto B tal que $B \not\mathcal{R} A$ para todo $A \subseteq X$, tenemos que asignarle al 2 o al 4 como elementos. Ya vimos antes que si no tiene uno de estos dos números como elemento existe un cierto A con el que se relaciona. Hay tres casos: sólo $2 \in B$, sólo $4 \in B$ o $2 \in B, 4 \in B$. Los restantes elementos de B pueden ser cualquiera de los 198 números que quedan. Cada uno de estos tiene dos opciones: estar o no estar, y por lo tanto habrá 2^{198} formas de elegir los elementos de B dentro de estos números. En total, serán 3.2^{198} conjuntos B que cumplen lo pedido.

Se puede también pensar por el complemento. Hay 2^{198} conjuntos distintos que no tienen al 2 o al 4 como elementos, y X tiene 2^{200} subconjuntos en total. Entonces, la cantidad de conjuntos B que cumplen lo pedido es $2^{200} - 2^{198} = 3.2^{198}$. Para hacer esto, hay que justificar que si B no tiene al 2 ni al 4 como elementos, falla lo pedido, pero si alguno de los dos pertenece, entonces sí se cumple.

Ejercicio 2. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que $4^n - 3^n > 2n^2$.

Solución. Probaremos el ejercicio por inducción en n.

- El caso base corresponde a $n = 3$. Vale que $4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$ y $2.3^2 = 18$, y entonces $37 > 18$.
- Queremos probar que vale $4^{n+1} - 3^{n+1} > 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2$. Asumimos, como hipótesis inductiva, que $4^n - 3^n > 2n^2$.

  Podemos escribir

  $$\begin{aligned} 4^{n+1} - 3^{n+1} &= 4.4^n - 3.3^n > 4.4^n - 4.3^n && \textit{(porque estoy restando algo más grande)} \\ &= 4(4^n - 3^n) \overset{\text{HI}}{>} 4.2n^2 = 8n^2. \end{aligned}$$

  Si probamos que $8n^2 > 2n^2 + 4n + 2$ tendríamos la última desigualdad necesaria para probar lo pedido. Pero vale que:

  $$8n^2 > 2n^2 + 4n + 2 \iff 6n^2 - 4n - 2 > 0$$

  Factorizando queda que $6n^2 - 4n - 2 = 2(3n+1)(n-1)$. El primer factor siempre es positivo si $n \in \mathbb{N}$, y el segundo es positivo si $n \geq 2$ (y estamos trabajando con $n \geq 3$). Por lo tanto, vale $6n^2 - 4n - 2 = 2(3n+1)(n-1) > 0$ para todo $n \geq 3$, y podemos completar:

  $$4^{n+1} - 3^{n+1} = 4.4^n - 3.3^n > 4.4^n - 4.3^n = 4(4^n - 3^n) \overset{\text{HI}}{>} 8n^2 > 2n^2 + 4n + 2 = 2(n+1)^2.$$

Con esto quedaría probado el ejercicio, pero hay otras formas de hacerlo. En este caso no tuve que recurrir a una segunda inducción porque la desigualdad quedaba fácil de probar. Si por ejemplo, tomando el mismo caso base $n = 3$, seguimos con:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 3^{n+1} &= 4.4^n - 3.3^n = 4.4^n - 4.3^n + 4.3^n - 3.3^n \\ & \qquad\qquad \textit{(sumo y resto } 4.3^n\textit{)} \\ &= 4(4^n - 3^n) + (4-3).3^n = 4(4^n - 3^n) + 3^n \overset{\text{HI}}{>} 8n^2 + 3^n. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que probar que $8n^2 + 3^n > 2n^2 + 4n + 2 \Leftrightarrow 3^n + 6n^2 - 4n - 2 > 0$. Cambiando letras (para no confundir la variable de inducción), queremos probar que $3^k + 6k^2 - 4k - 2 > 0$ para todo $k \geq 3$. El caso base sale reemplazando con $k = 3$: $3^3 + 6.3^2 - 4.3 - 2 = 27 + 54 - 12 - 2 = 67$ que es mayor a 0.

Para el paso inductivo, nuestra nueva hipótesis inductiva es $3^k + 6k^2 - 4k - 2 > 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 6(k+1)^2 - 4(k+1) - 2 &= 3.3^k + 6k^2 + 12k + 6 - 4k - 4 - 2 \\ &= 3^k + 6k^2 - 4k - 2 + (2.3^k + 12k + 2) \\ &\overset{\text{HI-2}}{>} 0 + (2.3^k + 12k + 2) \qquad \textit{(y este término es positivo si } k \geq 3) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Con esto probamos la desigualdad final que necesitábamos para el ejercicio original (por el camino nuevo).

Ejercicio 3. Hallar todos los $a \in \mathbb{N}$ tales que $3a + 6 | a^2 + 11$.

Solución. Usaremos las siguientes propiedades de divisibilidad: si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b \pm c$ y $a|k.b$ (para a, b, c, k enteros, a no nulo).

Como $3a + 6 | a^2 + 11$, entonces $3a + 6 | 3(a^2 + 11) = 3a^2 + 33$. Además, $3a + 6 | a(3a + 6) = 3a^2 + 6a$. Restando estos números se obtiene que $3a + 6 | 3a^2 + 33 - (3a^2 + 6a) = 33 - 6a$.

Sabemos también que $3a + 6 | 2(3a + 6) = 6a + 12$. Sumando este número al obtenido antes, queda que $3a + 6 | 33 - 6a + 6a + 12 = 45$. Entonces, $3a + 6$ tiene que ser un divisor de 45. Con esto ya acotamos los posibles resultados y podemos chequear a mano.

Otra forma de llegar a esto es haciendo una división de polinomios: $3a^2 + 33 = (3a + 6)(a - 2) + 45$ y por lo tanto $3a - 6$ tiene que dividir a 45, dado que divide a $3a^2 + 33$. No sería correcto usar la división de polinomios para llegar a $a^2 + 11 = \frac{1}{3}(a - 2)(3a + 6) + 15$ porque la aparición de la fracción hace que nos salgamos de $\mathbb{Z}$ (a menos que justifiquemos que no, porque $3a + 6$ es múltiplo de 3).

Observemos que $3a + 6 = 3(a + 2)$. Como $45 = 3.15$, podemos deducir que $a + 2 | 15$. Basta con fijarse entre los divisores de 15 para obtener los candidatos para los valores de a (en particular, como $a \in \mathbb{N}$, podemos buscar sólo entre los divisores mayores o iguales a 3, dado que $a \geq 1 \Leftrightarrow a + 2 \geq 3$). Nuestros candidatos son $a + 2 = 3$, $a + 2 = 5$ o $a + 2 = 15$, es decir, $a = 1$, $a = 3$ o $a = 13$.

Hasta acá sólo encontramos valores posibles de a. La condición de que $3a + 6 | 45$ o $a + 2 | 15$ es una condición necesaria pero no suficiente para hallar un valor de a. Hay que corroborar a mano que cumplan la condición del problema. Si $a = 1$, $3a + 6 = 9$ no divide a $a^2 + 11 = 12$. Si $a = 3$, $3a + 6 = 15$ no divide a $a^2 + 11 = 20$. Y si $a = 13$, $3a + 6 = 45$ sí divide a $a^2 + 11 = 180$. Entonces, la respuesta es que el único valor de a natural que cumple lo pedido es $a = 13$.

Ejercicio 4. ¿Cuántos anagramas de la palabra PRUEBAS pueden obtenerse con la condición de que no haya dos vocales juntas?

Solución. Una primera observación es que como las siete letras de la palabra PRUEBAS son distintas entre sí, habrá en total 7! anagramas posibles (sin restricciones). Para resolver el ejercicio se pueden plantear varios caminos.

Camino 1. Como pedimos que las vocales estén separadas, tiene que haber al menos una consonante entre ellas para separarlas. Puede haber más de una, y también puede haber consonantes "extra" en las puntas izquierda o derecha de la palabra. Intentar fijar las vocales y asignar las consonantes entre ellas es complicado porque puede haber más de una consonante entre cada vocal, llevando a que tengamos que separar en casos.

Pensemos entonces que las consonantes son como barreras que separan espacios donde puede ir a lo sumo una vocal. Si un espacio está vacío, entonces esas dos consonantes van pegadas. De esta forma aseguramos la separación entre vocales, y consideramos los casos donde quedan dos o más consonantes entre vocales.

Tenemos 4 consonantes, P, R, B y S, con 4! formas de permutarlas. Tomemos un orden arbitrario, como PRBS. Los espacios que separan las consonantes son 5:

_ P _ R _ B _ S _

De esos espacios, elegimos 3 para llenarlos con las 3 vocales U, E y A. La forma de realizar esta elección es $\binom{5}{3}$. Una vez que elijamos los espacios para las vocales, tenemos 3! formas de ordenarlas. Supongamos que llenamos los espacios 1, 4 y 5 con las vocales en el orden A, E, U:

A P _ R _ B E S U

El anagrama en este caso sería APRBESU. Por la forma en la fuimos armando los anagramas, el número posible de ellos es $4!.\binom{5}{3}.3! = \frac{4!5!}{2!} = 1440$.

Este camino es el más directo, y no tenemos que ir considerando casos, lo que hace menos probable que nos equivoquemos. Pero es más abstracto para plantear, y quizás a primera vista no sale.

Camino 2. Armamos todas las combinaciones posibles de vocales y consonantes compatibles con lo pedido. Tenemos cuatro vocales que simbolizamos con la letra C, y tres vocales, V.

CCVCVCV CVCCVCV CVCVCCV CVCVCVC

VCCCVCV VCCVCCV VCCVCVC VCVCCCV

VCVCCVC VCVCVCC

Hay 4! permutaciones posibles para las consonantes y 3! para las vocales en cada orden posible C-V. El número total de posibles anagramas es 10.4!.3!.

La dificultad de este camino consiste en enumerar correctamente todos los órdenes posibles de C y V. Pero podíamos saber, como ya habíamos hecho el camino 1, que tienen que ser $\binom{5}{3} = 10$.

Camino 3. Contamos por el complemento. Un anagrama dado puede tener grupos de a lo sumo 1, 2 o 3 vocales juntas (1 vocal junta es que está ella sola) Nosotros queremos los casos con 1 vocal junta; entonces, contamos los casos de 2 y 3 y se los restamos al total.

Digamos primero que la cantidad de anagramas totales es $A = 7!$. Contamos ahora la cantidad de anagramas donde elegimos un par de vocales para ir juntas. Como son 3 vocales, hay $\binom{3}{2} = 3$ pares posibles, (AE), (AU) y (EU), cada uno de ellos con 2! ordenamientos posibles. Supongamos que elegimos el par (AE). Tenemos que distribuir ahora las letras P, R, B, S, (AE) y U, y hay 6! formas de hacer eso. Entonces, hay $B = 3.2.6!$ anagramas donde van dos vocales juntas (3 formas de elegir el par de vocales, por 2 formas de ordenar el par, por 6! formas de distribuir las letras).

El problema con esta forma de contar es que estamos repitiendo casos. No estamos garantizando que la tercera vocal no se pegue a las demás, y entonces, contamos los anagramas (por ejemplo) PR(UE)ABS y PRU(EA)BS dos veces. Cada vez que se juntan las tres vocales, hay dos formas de lograrlo: en el caso anterior, es el par (UE) y la A a la izquierda, o la U a la derecha y el par (EA) a la izquierda. O sea, cada palabra con tres vocales juntas fue contada dos veces.

Para armar una palabra con tres vocales juntas, tenemos 3! formas de permutarlas, y para distribuir las letras P, R, B, S, (AEU) habrá 5! maneras de hacerlo. O sea, tenemos $C = 6.5! = 6!$ anagramas con tres vocales juntas.

Finalmente, la cantidad de anagramas con las vocales separadas será $A - (B - C) = A - B + C = 7! - 6.6! + 6! = 1440$.

Esta forma de contar es la más complicada para el problema. La fórmula que queda es similar a la de restar la intersección (fórmula de inclusión-exclusión, ver ejercicio 3.3 con A="1 vocal junta", B="2 juntas" y C="3 juntas"). Yo elegí plantearla así porque entrar en casos y considerar cuándo se juntan tres vocales y cuando sólo hay dos juntas es bastante más complicado. Un error muy habitual en el parcial fue restar los casos de dos vocales juntas pero no chequear que se repetían algunos. Yo no elegiría plantear el ejercicio así, pero se puede hacer.

Ejercicio 5. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ verifican $(a : b) = 6$, hallar todos los valores posibles de $d = (7a - 3b : 2a + 5b)$. Encontrar un par (a, b) para cada valor hallado de d.

Solución. Para simplificar las cuentas, coprimizamos a y b: vale que $a = 6a'$, $b = 6b'$ con $(a' : b') = 1$. Reemplazando en la definición de d:

$$d = (7a - 3b : 2a + 5b) = (7.6a' - 3.6b' : 2.6a' + 5.6b') = 6(7a' - 3b' : 2a' + 5b').$$

Esto en particular nos dice que d es múltiplo de 6. Digamos que $d' = 6d$, y entonces $d' = (7a' - 3b' : 2a' + 5b')$. Armaremos combinaciones lineales adecuadas que nos permitan simplificar esto.

Como $d'|2(7a' - 3b') = 14a' - 6b'$ y $d'|7(2a' + 5b') = 14a' + 35b'$, por propiedades de divisibilidad $d'|14a' - 6b' - (14a' + 35b') = -41b'$. Por lo tanto, $d'|41b'$. Análogamente, $d'|5(7a' - 3b') = 35a' - 15b'$ y $d'|3(2a' + 5b') = 6a' + 15b'$ implican que $d'|35a' - 15b' + 6a' + 15b' = 41a'$.

Como $d'|41a'$ y $d'|41b'$, sabemos que $d'|(41a' : 41b')$. Pero $(41a' : 41b') = 41(a' : b') = 41$, dado que a' y b' eran coprimos. Entonces, siendo 41 primo, $d' = 1$ o $d' = 41$, y $d = 6d' = 6$ o $d = 246$.

Buscamos ejemplos para esos dos casos. Si tomamos $a = b = 6$ queda que $(a : b) = 6$, $7a - 3b = 24$, $2a + 5b = 42$ y $(24 : 42) = 6$. Para el caso $d = 6$ podemos ir probando números. Otra forma es pedir por ejemplo que $7a' - 3b' = 41$ y $2a' + 5b' = 41$ (o $7a - 3b = 246$, $2a + 5b = 246$, es lo mismo pero ya habiendo dividido por 6). Resolviendo el sistema queda $a' = 8$, $b' = 5$ y entonces $a = 48$, $b = 30$. Estos valores verifican que $(a : b) = 6$, $7a - 3b = 246$, $2a + 5b = 246$ y entonces $d = 246$.