1) a) Por las propiedades del polinomio de taylor yo sé que:

$$f(1,-1) = T_2(1,-1)$$
$$f_x(1,-1) = T_{2x}(1,-1)$$
$$f_y(1,-1) = T_{2y}(1,-1)$$
$$f_{xx}(1,-1) = T_{2xx}(1,-1)$$
$$f_{yy}(1,-1) = T_{2yy}(1,-1)$$
$$f_{yx}(1,-1) = T_{2xy}(1,-1)$$

O sea, debido a que el polinomio de taylor está centrado en el $(1,-1)$, al evaluar $f(x,y)$ en $(1,-1)$ y sus derivadas en $(1,-1)$, tendrían que dar lo mismo.

Por lo tanto voy a calcular las derivadas de T_2 evaluandolas en $(1,-1)$ para así sacar información de las derivadas de f en $(1,-1)$

$$T_{2x}(x,y) = -3 + 2x - y$$
$$T_{2y}(x,y) = 7 + 6y - x$$

Según la definición de punto crítico

$$\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$$

Para saber si $(1,-1)$ es un punto crítico voy a utilizar el $\nabla T_2(1,-1)$ si esto da 0, $(1,-1)$ es un punto crítico de f.

$$\nabla T_2(x,y) = (-3 + 2x - y \ , \ 7 + 6y - x)$$
$$\nabla T_2(1,-1) = (-3 + 2 - (-1) \ , \ 7 + 6\cdot(-1) - 1)$$
$$\nabla T_2(1,-1) = (0,0)$$

$\therefore$ $(1,-1)$ es un punto crítico

Ahora voy a clasificarlo utilizando el criterio de la segunda derivada

$$T_{2xx}(1,-1) = 2$$
$$T_{2yy}(1,-1) = 6$$
$$T_{2xy}(1,-1) = -1$$

$$D = \det \begin{pmatrix} T_{2xx}(1,-1) & T_{2xy}(1,-1) \\ T_{2xy}(1,-1) & T_{2yy}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = 11$$

como $D > 0$ y $T_{xx} > 0$ concluyo que $(1,-1)$ es un minimo local

$\boxtimes$

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y) - 12}{\|(x,y) - (1,-1)\|}$$

Por las propiedades del polinomio de taylor yo se que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{R_1}{\|(x,y) - (1,-1)\|} = 0$$

el resto de orden 1 de T_1 de f tiende a cero al dividirlo por la norma.

entonces:

$$T_1(-1,1) = f(-1,1) + \underbrace{f_x(1,-1)}_{=0}(x-1) + \underbrace{f_y(1,-1)}_{=0}(y+1)$$

osea que el límite quedaria:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y) - 12}{\|(x,y) - (1,-1)\|} + \frac{R}{\|(x,y)\|}$$ → tiende a 0

Por lo cual me quedaría calcular $f(1,-1)$, como el polinomio de taylor que me dieron esté centrado en $(1,-1)$ lo utilizo para hallar $f(1,-1)$

$$f(1,-1) = T_2(1,-1) = 17 - 3 + 7(-1) + 1^2 + 3(-1)^2 - 1\cdot(-1) = 12$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{12-12}{\|(x,y)-(1,-1)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{0}{\|(x,y)-(1,-1)\|} = 0$$

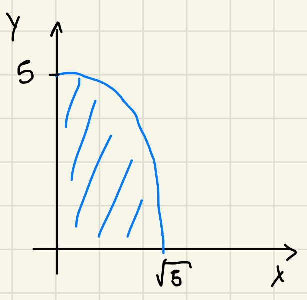
concluyo que el límite existe y es 0.

$\boxslash$

2) $f(x,y) = (x-1)(x-y) = x^2 - xy - x + y$

con $0 \leq x \leq \sqrt{5}$ y $0 \leq y \leq 5 - x^2$

grafico la región:



Primero voy a buscar puntos críticos dentro de la región, para que un punto sea crítico:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$$

entonces:

$$\nabla f(x,y) = (2x - y - 1,\ -x+1)$$

hago un sistema para sacar los puntos críticos:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ \quad -x + 1 = 0 \end{cases}$$

de la segunda ecuación saco que:

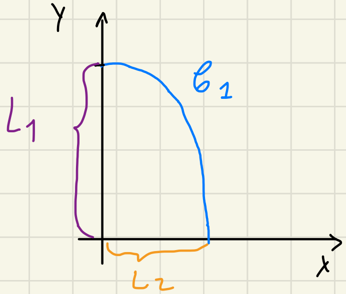
$$-x + 1 = 0$$
$$-x = -1$$
$$\boxed{x = 1}$$

reemplazo el x hallado en la primera ecuación:

$$2\cdot(1) - y - 1 = 0$$
$$2 - y - 1 = 0$$
$$1 - y = 0$$
$$-y = -1$$
$$\boxed{y = 1}$$

concluyo que $(1,1)$ es un punto crítico

Ahora voy a buscar puntos críticos en los bordes:



Busco puntos críticos en la recta L_1:

L_1: $f(x,0) = x^2 - x = h(x)$

$h'(x) = 2x - 1$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

entonces $(\frac{1}{2}, 0)$ es un punto crítico.

Busco puntos críticos en L_2:

L_2: $f(0,y) = y = j(x)$

$j'(x) = 1$ como no hay puntos x que satisfagan esto concluyo que esta recta no tiene puntos críticos.

Ahora busco puntos críticos en $\mathcal{C}$ utilizando multiplicadores de Lagrange:

establezco que:

$\mathcal{C} \to y = 5 - x^2$

$y + x^2 = 5$

$g(x,y) = y + x^5$ con $g(x,y) = 5$ como su curva de nivel

Planteo multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda \; g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda \; g_y(x,y) \\ g(x,y) = K \end{cases}$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 1)$$

entonces:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = \lambda \cdot 2x \\ -x + 1 = \lambda \\ y + x^2 = 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación saco λ y remplazo el λ hallado en la primera ecuación

$$\lambda = -x + 1$$

$$2x - y - 1 = (-x+1) \cdot 2x$$
$$\cancel{2x} - y - 1 = -2x^2 + \cancel{2x}$$
$$y + 1 = 2x^2$$
$$y = 2x^2 - 1$$

Ahora sustituyo el valor de y hallado en la ultima ecuación

$$2x^2 - 1 + x^2 = 5$$
$$3x^2 = 6$$
$$x^2 = 2$$
$$\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

busco y

$$y = 2(\sqrt{2})^2 - 1 = 3$$
$$y = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 1 = -1$$

$(\sqrt{2}, 3)$ es un punto crítico

$\cancel{(-\sqrt{2}, -1)}$ no es un punto crítico porque no esta en el domino de la región.

recapitulando los puntos críticos obtenidos fueron:

$$PC = \{ (\sqrt{2}, 3), (1,1), (\tfrac{1}{2}, 0) \}$$

evaluo los puntos críticos y los vertices de el dominio

P_j	$f(P_j)$
$(1,1)$	0
$(\sqrt{2},3)$	$-0{,}6\ldots$ → mínimo absoluto.
$(\frac{1}{2},0)$	$-\frac{1}{4}$
$(0,5)$	20 → max absoluto
$(\sqrt{5},0)$	$2{,}7\ldots$
$(0,0)$	0

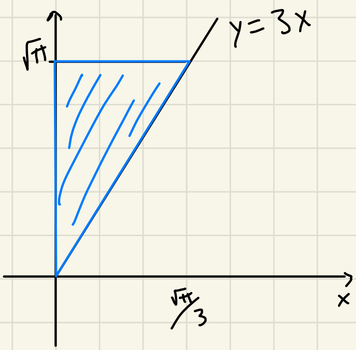
Vertices de D: $(0,5)$, $(\sqrt{5},0)$, $(0,0)$

$\boxtimes$

③ a)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/3} \left(\int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\, dy \right) dx$$

grafico el area a integrar



Cambio el orden de integración (fubini) para poder hacer la integral comodamente

$$y = 3x$$
$$x = \frac{y}{3}$$

entonces:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{y/3} \operatorname{sen}(y^2)\, dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2) \left(\int_0^{y/3} 1 \, dx \right) dy =$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2) \left(x \Big|_{x=0}^{x=y/3} \right) dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2) \cdot \frac{y}{3}\, dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\, y \, dy = \circledast$$

utilizo sustitución $u = y^2 \quad du = 2y$

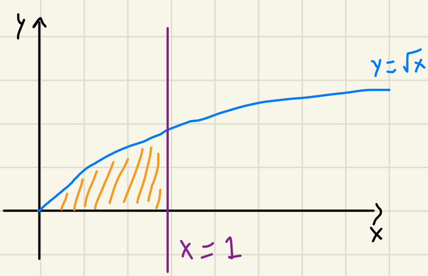
$$\circledast = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(u)\, du = \frac{1}{6} \left(-\cos(y^2) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{\pi}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\cos \pi + \cos 0 \right) = \frac{1}{6} (1+1) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

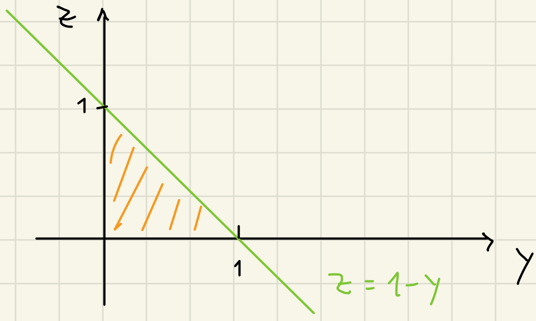
$\boxtimes$

b) grafico las superficies dadas desde diferentes perspectivas para hallar el sólido acotado por estas.

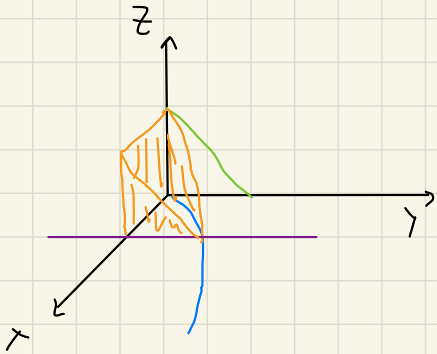
visto desde arriba:



visto desde un costado:



entonces: fijo x y las variables y, z van depender de las curvas



$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{x}$$
$$0 \leq z \leq 1-y$$

entonces la integral es:

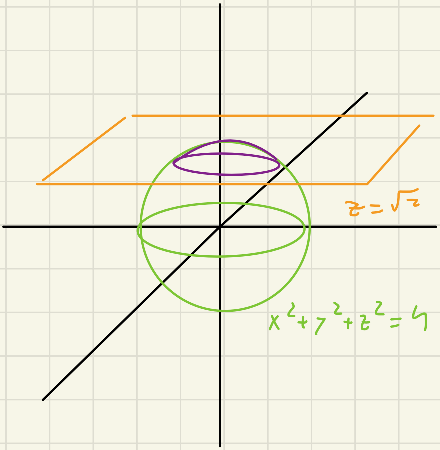
$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{1-y} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(z \Big|_{z=0}^{z=1-y} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} (1-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \right) =$$

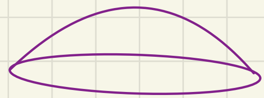
$$= \int_0^1 \sqrt{x} - \frac{x}{2} \, dx = \left(\frac{2}{3} (x)^{3/2} - \frac{x^2}{4} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

$\boxed{/}$

③ grafico la región:



la región a integrar es:



Primero me fijo donde corta el plano a la esfera

$$x^2+y^2+(\sqrt{2})^2=4$$

$$x^2+y^2+2=4$$

$$x^2+y^2=2$$

el plano corta a la esfera en una circunferencia de radio $\sqrt{2}$

Para calcular la integral voy a hacer un cambio de variable a coordenadas esfericas:

establezco las nuevas variables

$$x=\rho\cdot \operatorname{sen}\theta\cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$y=\rho\cdot\cos\theta\ \operatorname{sen}\varphi \qquad JT=\rho^2\cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$z=\rho\ \cos\varphi$$

me fijo los límites de integración de θ, φ y ρ

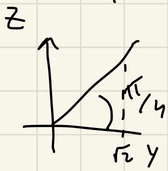
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi/4$

$\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi} \leq \rho \leq 2$

$z \geq \sqrt{2} \Rightarrow \rho \cdot \cos\varphi \geq \sqrt{2}$

$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}$



entonces:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}}^{2} \frac{1}{(\rho^2)^2} \cdot \underbrace{\rho^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi}_{\text{Jacobiano}} \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\operatorname{sen}\varphi \int_{\sqrt{2}/\cos\varphi}^{2} \frac{\cancel{\rho^2}}{\rho^4} \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \left(\operatorname{sen}\varphi \int_0^{2} \frac{1}{\rho^2} \, d\rho \right) d\varphi)$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \left(-\frac{1}{\rho} \Big|_{\rho=\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}}^{\rho=2} \right) d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \left(-\frac{1}{2} + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \right)$$

defino $u = -\frac{1}{2} + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}$

$$du = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \sqrt{2}\, du = \operatorname{sen}\varphi \cdot d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1/2}^{0} -\sqrt{2} \cdot u \, du = 2\pi \cdot (-\sqrt{2}) \left(\frac{u^2}{2} \Big|_{u=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{u=0} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) = \boxed{\pi \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - 1 \right)}$$