Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (03-08-2021) Resuelto

1. (a) Encuentre todos los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tales que

$$(1, 2, 1) \times \vec{v} = (3, 1, -5).$$

(b) Explique por qué no existe un vector $\vec{v}$ tal que

$$(1, 2, 1) \times \vec{v} = (3, 1, 5).$$

Solución: (a) Por definición,

$$(1,2,1)\times(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (2v_3 - v_2)\mathbf{i} + (v_1 - v_3)\mathbf{j} + (v_2 - 2v_1)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2v_3 - v_2 &= 3 \\ v_1 - v_3 &= 1 \\ v_2 - 2v_1 &= -5 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se sigue que $v_2 = 2v_3 - 3$, y de la segunda, que $v_1 = v_3 + 1$. Entonces

$$v_2 - 2v_1 = 2v_3 - 3 - 2(v_3 + 1) = -5,$$

lo que prueba que estos valores satisfacen la tercera ecuación.

Respuesta: lo vectores $\vec{v}$ tales que $(1, 2, 1) \times \vec{v} = (3, 1, -5)$ son los vectores de la forma $(t + 1, 2t - 3, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si existiera $\vec{v}$ tal que $(1, 2, 1) \times \vec{v} = (3, 1, 5)$, entonces $(3, 1, 5)$ sería ortogonal a $(1, 2, 1)$, pero $(1, 2, 1) \cdot (3, 1, 5) = 10 \neq 0$.

Otra forma: al intentar resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2v_3 - v_2 &= 3 \\ v_1 - v_3 &= 1 \\ v_2 - 2v_1 &= 5 \end{aligned}$$

en forma similar a como se procedió en el item (a), se llega a

$$v_2 - 2v_1 = 2v_3 - 3 - 2(v_3 + 1) = -5 \neq 5,$$

por lo que este sistema no tiene solución.

2. Sea S la superficie de ecuación

$$x^4 - y + z = 0.$$

Encontrar todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que:

(a) $(a, b, 1) \in S$.

(b) El plano tangente a S en $(a, b, 1)$ es perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-3}{32} = 1 - y = z + 4$.

Solución: El punto $(a, b, 1) \in S$ si y sólo si $a^4 - b + 1 = 0$. Despejando b de esta ecuación obtenemos

$$b = a^4 + 1. \tag{1}$$

Sea $f(x, y, z) = x^4 - y + z$. El plano tangente a S en $(a, b, 1)$ es ortogonal al vector gradiente

$$\bigtriangledown f(a, b, 1) = (4a^3, 1, -1),$$

y queremos que ese plano sea perpendicular a la recta L de ecuación $\frac{x-3}{32} = 1 - y = z + 4$. Para esto, $(4a^3, -1, 1)$ tiene que ser paralelo a un vector director, $\vec{v}$, de L. Tomamos como $\vec{v}$ la resta de 2 puntos de L. Por ejemplo, podemos tomar

$$\vec{v} = (35, 0, -3) - (3, 1, -4) = (32, -1, 1).$$

Así, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

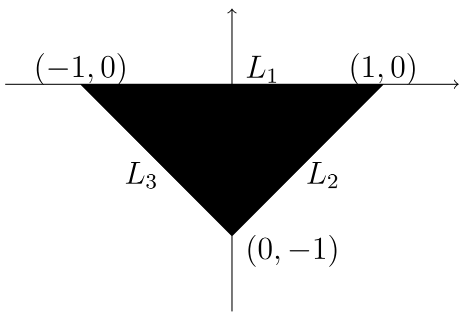
$$(4a^3, -1, 1) = \lambda(32, -1, 1).$$

Pero como todas las coordenadas deben coincidir, necesariamente $\lambda = 1$, y, por lo tanto $a^3 = \frac{32}{4} = 8$, por lo que $a = 2$. Finalmente, de la ecuación (1) se sigue que $b = 2^4 + 1 = 17$.

Respuesta: $a = 2$ y $b = 17$

3. Sea R la región triangular de vértices $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$, y sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = xy + y + x + 1$. Halle los puntos de R en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos, y diga cuánto vale f en esos puntos.

Solución: Un dibujo del conjunto R es



Por el Teorema de Weierstrass sabemos que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos en R. Primero buscamos los puntos críticos en el interior de R. Tenemos

$$f_x(x,y) = y + 1 \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = x + 1$$

Estas funciones se anulan en $(-1,-1)$, pero este no es un punto de R. Mucho menos de su interior. Así que lo descarto. Ahora buscamos los puntos críticos en el borde. Para ello parametrizamos los tres segmentos $L_1 = [(-1,0),(1,0)]$, $L_2 = [(0,-1),(1,0)]$ y $L_3 = [(-1,0),(0,-1)]$, y buscamos los puntos críticos de f compuesto con las parametrizaciones.

Parametrización de L_1: $\sigma_1(t) = (t,0)$, con $-1 \le t \le 1$.

Parametrización de L_2: $\sigma_2(t) = (t,t-1)$, con $0 \le t \le 1$.

Parametrización de L_3: $\sigma_3(t) = (t,-t-1)$, con $-1 \le t \le 0$.

Para hallar los puntos críticos de f sobre L_1 derivamos

$$f \circ \sigma_1(t) = f(t,0) = t + 1,$$

e igualamos a 0. Pero como $(f \circ \sigma_1)'(t) = 1$, f no tiene puntos críticos sobre L_1, salvo en sus extremos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Para hallar los puntos críticos de f sobre L_2 derivamos

$$f \circ \sigma_2(t) = f(t,t-1) = t(t-1) + t + t - 1 + 1 = t^2 + t,$$

e igualamos a 0. Cómo $(f \circ \sigma_2)'(t) = 2t + 1$ se anula en $t = -\frac{1}{2}$, que no es un punto del dominio de σ_2, f no tiene un punto crítico en L_2 salvo en sus extremos $(0, -1)$ y $(1, 0)$.

Para hallar los puntos críticos de f sobre L_3 derivamos

$$f \circ \sigma_3(t) = f(t, -t-1) = t(-t-1) - t - 1 + t + 1 = -t^2 - t,$$

e igualamos a 0. Cómo $(f \circ \sigma_3)'(t) = -2t1$ se- anula en $t = -\frac{1}{2}$, $\sigma_3(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ es un punto critico de f en L_3 (y también lo son los extremos de L_3, que ya aparecieron arriba).

Resumiendo, los puntos críticos de f son los puntos $P_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_2 = (-1, 0)$, $P_3 = (1, 0)$ y $P_4 = (0, -1)$. Para hallar los extremos absolutos de f en R evaluamos f en estos puntos, obteniendo:

$$f(P_1) = \frac{1}{4}, \quad f(P_2) = f(P_4) = 0 \quad \text{y} \quad f(P_3) = 2.$$

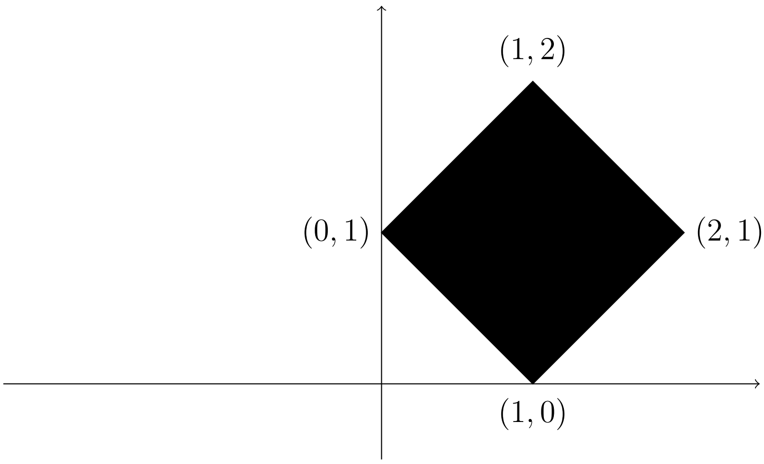
Respuesta: Sobre R la función f alcanza su máximo absoluto 2 en $(1, 0)$, y su mínimo absoluto 0 en $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

4. Usando un cambio de variables apropiado calcule de manera exacta

$$\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dxdy,$$

donde R es el cuadrado de vértices $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ y $(1,0)$.

Solución: Un dibujo del conjunto R es



El cambio de variables $T(x,y) = (x+y, x-y)$ satisface

$$\begin{aligned} T(0,1) &= (1,-1), \\ T(1,2) &= (3,-1), \\ T(2,1) &= (3,1) \end{aligned}$$

y

$$T(1,0) = (1,1).$$

Por lo tanto, como es una función lineal biyectiva, T aplica R en el cuadrado $R' = [1,3] \times [-1,1]$, de vértices $(1,-1)$, $(3,-1)$, $(3,1)$ y $(1,1)$.

Para determinar T^{-1}, resolvemos el sistema

$$u = x + y \quad \text{y} \quad v = x - y,$$

en función de u y v, obteniendo

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Así, $T^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$. El determinante Jacobiano de T^{-1} es

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Asi, por el Teorema del cambio de variables,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dxdy &= \iint_{R'} u^2 \operatorname{sen}^2(v) \frac{1}{2}\, dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{1}^{3} u^2 \operatorname{sen}^2(v)\, dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_{1}^{3} u^2\, du \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2(v)\, dv \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{26}{3} \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2(v)\, dv \\
&= \frac{13}{3} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 - \cos(2v))\, dv \\
&= \frac{13}{6} \left(\int_{-1}^{1} 1\, dv - \int_{-1}^{1} \cos(2v)\, dv \right) \\
&= \frac{13}{6} \left(2 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2v) \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= \frac{13}{6} \left(2 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2) \right) \\
&= \frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen}(2)),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad vale por el Teorema del cambio de variable; la segunda, tercera y sexta, porque la integral es lineal; la cuarta, septima y octava por cálculo directo; la quinta, porque $\operatorname{sen}^2(v) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2v))$; y la última porque la función seno es impar.

Respuesta: La integral pedida vale $\frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen}(2))$.

Nota: $\int \operatorname{sen}^2(v)\, dv$ también puede calcularse por partes.