1	2	3	4	5
B	R+	B	B=	X

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]

LIBRETA: [redacted]

TURNO: ☐ Mañana (8-11) ☐ Tarde (14-17) ☒ Noche (17-20)

CARRERA: Computación

Álgebra I - 2do Cuatrimestre 2016

Primer Recuperatorio del Segundo Parcial - 06/12/2016

1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $11^n + 13n + 8$ es divisible por 143.

2. Determinar todos los primos positivos p tales que $(3^p + 4^{2p} : 5p) \neq 1$.

3. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz décima primitiva de la unidad. Calcular la suma
$$w^{3^{2016}} + w^{3^{2017}} + w^{3^{2018}} + w^{3^{2019}}.$$

4. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio
$$2X^5 - 3X^4 - 3X^3 - 4X^2 + X + 1$$
sabiendo que contiene entre sus raíces a una raíz cúbica de la unidad.

5. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por
$$f_1 = (X-5)^3 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X-5)f_n' - Xf_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Probar que 5 es raíz de multiplicidad exactamente 3 de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

① para que sea div, tiene que pasar que la congruencia de "0"

143 | 11
13 | 13

osea:

$$11^n + 13n + 8 \equiv 0\ (143)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 11^n + 13n + 8 \equiv 0\ (11) & ① \\ 11^n + 13n + 8 \equiv 0\ (13) & ② \end{cases}$$

① como 11^n es div a 11 porque si $11/a \Rightarrow 11^{an}/a$

$13n + 8 \equiv 0\ (11)$

$2n \equiv -8\ (11) \Rightarrow$

$2n \equiv 14\ (11)$

$\boxed{n \equiv 7\ (11)}$

② $11^n + \cancel{13n}^{\,0} + 8 \equiv 0\ (13) \Rightarrow 11^n \equiv -8\ (13)$

$11^n \equiv 5\ (13)$

como $(11:13) = 1$, uso fermat,

osea $11^{12} \equiv 1\ (13)$ pero no interesa el resto

osea $11^{12k+r} \equiv 5\ (13) \iff (\underbrace{11^{12}}_{1})^k \cdot 11^r \equiv 5\ (13)$

$11^r \equiv 5\ (13)$

Busco los restos por tabla

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(-2)^n$	1	11	4	$\boxed{5}$	3	7	1	11	9	8	10	6	1

de acá obtengo todos los posibles valores de n que cumplen osea $n = 12k + 3 \Rightarrow \boxed{n \equiv 3 \ (12)}$

ahora tengo 2 sistema para n

$$\begin{cases} n \equiv 3 \ (12) \\ n \equiv 7 \ (11) \end{cases}$$

puedo usar TCR
ya que sus modulos son
coprimos y me asegura que
hay sol.

$n - 3 = 12k \Rightarrow n = 12k + 3$

reemplazo en la segunda ecuacion de congruencia

$12k + 3 \equiv 7 \ (11) \Rightarrow k \equiv 7 - 3 \ (11)$

$k \equiv 4 \ (11)$

$k - 4 = 11j$

$k = 11j + 4$

lo aplico en la ecuacion de n

$n = 12(11j + 4) + 3 \Rightarrow n = 132j + 51$

los n que cumplen son de la forma

$$\boxed{n \equiv 51 \ (132)}$$

(2) $(3^p + 4^{2p} : 5p) \neq 1$

I II

Tengo que hallar ~~los~~ todos los p que dividen a $3^p + 4^{2p}$ y $5p$, ya que si es coprimo no compartirán ninguno.

~~P~~ primero pruebo con los primos que están dentro o sea 3, 2 y 5

si $p = \cancel{3}\,2$

$(9 + 16^2 : 10) = 5$, con $p = 2$ cumple.

si $p = 3$

$(3^3 + (4^2)^3 : 5.3) = 1$, no cumple

si $p = 5$

$(3^5 + (4^2)^5 : 5.5) = 1$, no cumple

ahora lo que quiero es un p que divida a I y II o sea

$p \mid 3^p + 4^{2p} \wedge \cancel{\circ} p \mid 5p$ donde ~~[illegible]~~

como $p \mid 3^p + 4^{2p} + 5p \Rightarrow 3^p + 4^{2p} + 5p \equiv 0\ (p)$

lo que puedo tomar ahora es que $a^p \equiv a\ (p)$

y si $(a : p) = 1 \Rightarrow$

la única manera para que $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$

$3^p + 4^{2p} + 5p \equiv 0\ (p)$ es que ~~P~~ con un $p = 19$

por Fermat

$a^{19} \equiv a\ (19)$

ya que

$y\ a^{18} \equiv 1\ (19)$

$3^{19} + 16^p + 5p \equiv \underbrace{3^{18}}_{1} . 3 + 16 + 0 \equiv \cancel{\circ} + 19 \equiv 19\ (19) \Rightarrow \cancel{19}$

$\equiv 0\ (19)$

los únicos ~~[illegible]~~ primos que cumplen son $\boxed{19 \text{ y } 2}$ ∎

TE FALTA VER SI EL 5 DIVIDE A

$3^p + 4^{2p}$

④ $2x^5-3x^4-3x^3-4x^2+x+1$

yo se que una raiz de G_3 esta en el pol. ← que es raiz del pol también

creo $G_3=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 1\right\}$

~~Como~~ compruebo si 1 esta en el pol

$$f(1)=2(1)^5-3(1)^4-3(1)-4(1)+1+1$$
$$=-1-3-4+2\neq 0$$

por ende 1, no es raiz, ahora sup que los complejos de G_3 lo son, pero si esta es raiz, su conjugada también lo es.

$$\left(x-\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)\right)=x^2+x+1$$

ahora los divido, para comprobar que son raiz del pol.

$$\begin{array}{l|l}
2x^5-3x^4-3x^3-4x^2+x+1 & x^2+x+1 \\
\hline
-2x^5+2x^4+2x^3 & 2x^3-5x^2+1 \\
\hline
0\quad -5x^4-5x^3-4x^2+x+1 & \\
-\quad -5x^4-5x^3-5x^2 & \\
\hline
0\quad 0\quad x^2+x+1 & \\
-\quad x^2+x+1 & \\
\hline
0/ &
\end{array}$$

por ahora tengo que

$$P(x)=(x^2+x+1)(2x^3-5x^2+1)$$

$g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$, utilizo el criterio de gauss para seguir buscando raíces.

posibles raíces $\{\pm 1, \pm 1/2\}$

tengo que 1/2 es raíz

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{2}{8} - \frac{5}{4} + 1 = \frac{1-5}{4} + 1 = -1+1 = \boxed{0}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 5x^2 + 0x + 1 & 1x - 1/2 \\ \hline -\quad 2x^3 - x^2 & 2x^2 - 4x - 2 \\ \hline 0 \quad -4x^2 + 0x & \\ -\quad -4x^2 + 2x & \\ \hline 0 \quad -2x + 1 & \\ -\quad -2x + 1 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

osea $g(x) = (x - 1/2)(2x^2 - 4x - 2)$

ahora Busco por medio de la resolvente las raíces restantes

$2x^2 - 4x - 2 = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\boxed{1 \pm \sqrt{2}}$$

las raíces faltantes.

la factorització del polinomi en $\mathbb{R}$

és $P(x) = (x^2+x+1)(x-1/2)(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))$

TAL la factorització de $\mathbb{Q}$ és la mateixa que en $\mathbb{R}$

i la factorització en $\mathbb{C}$ és

$$P(x) = \left(x - \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1-\sqrt{3}}{2} i\right)\right)(x-1/2)(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))$$

$\boxed{\equiv}$

3 ~~ja que les arrels de~~

ja se que

$$\omega^{3^{2016}} + \dots + \omega^{3^{2019}}$$

~~podria establir congruència per ...~~
~~la suma de la que em pide, per potències de~~

Redueixo les potències, per a ... i són la suma de les primitives de G_{10}

Com $3^{2016} \equiv 1\ (10)$ per φ de Euler

tenim que $3^4 \equiv 1 (10)$ $\varphi(4) = \varphi(2)\varphi(5)$

per tant, el primer ω^1 ja que $(3^4)^{504} \equiv 1 (10)$

$3^{2017} = \underbrace{3^{2016}}_{1} \cdot 3 \equiv 3 (10)$

$\omega^{3^{2016}} \equiv \omega$

$3^{2018} \equiv \underbrace{3^{2016}}_{1} \cdot \underbrace{3^2} \equiv 9 (10)$

$\omega^{3^{2017}} \equiv \omega^3$

$\omega^{3^{2018}} \equiv \omega^9$

$3^{2019} \equiv \underbrace{3^{2016}}_{1} \cdot 3^3 \equiv 27 \equiv 7 (10)$

$\omega^{3^{2019}} \equiv \omega^7$

donde justamente tengo

$$\omega + \omega^3 + \omega^7 + \omega^9$$

al ser las potencias de la raíz coprimas con 10, me aseguro que esto son las raíces primitivas de G_{10}.

~~lo de arriba se podría ver~~

ahora quiero ver cuanto vale la suma de la raíces primitivas, ~~con el~~ de G_{10}

yo se que $G_n = \bigcup_{d|n} G_d^*$ (raíces primitivas)

por ende tengo que

$G_{10} = \bigcup_{d|10} G_d^*$ donde los div de 10 son 1, 2, 5, 10

osea

~~$G_{10} = G_1^* \cup G_2^* \cup G_5^* \cup G_{10}^*$~~

Por propiedad se que $\sum G_1^* = 1$

y $\underbrace{\sum G_p^* = -1}$

la sumatoria de las raíces primitivas de G_p, donde p es un primo es -1

y la sumatoria de $\sum G_{10n} = 0$

$$\underbrace{\sum_{G_{10}}}_{0} = \sum_{G_1^*} + \sum_{G_2^*} 1 + \sum_{G_5^*} 1 + \sum_{G_{10}^*} 1$$

$$= 1 + (-1) \quad (-1) +$$

$$0 = 0 - 1 + \sum_{G_{10}^*} 1$$

$$\sum_{G_{10}^*} 1 = 1$$

entonces llego, que la suma de las raíces primitivas de G_{10} es $\boxed{1}$