1	2	3	4	5	Calificación
B	B	B	B⁻	B	APROBADO

¡MUY BUENO!

APELLIDO Y NOMBRE: NO. DE LIBRETA:

TURNO: ☐ Mañana ☒ Tarde ☐ Noche CARRERA: Cs. de la Computación

Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Primer Parcial - 13/5/2016

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 23\}$. En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A\mathcal{R}B \iff A \triangle B \text{ no contiene números impares.}$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

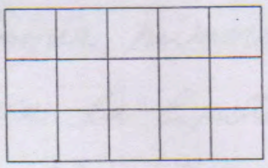
   b) ¿Cuántos elementos tiene la clase de $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$?

2. Probar que

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. En el siguiente tablero de 3 filas y 5 columnas se desea pintar 9 casillas de rojo y las restantes 6 casillas de azul, de manera que ninguna fila quede completamente roja (es decir, en cada fila debe haber al menos una casilla pintada de azul). ¿De cuántas maneras distintas se lo puede hacer?



4. Calcular el resto de la división de $\sum_{i=0}^{99} 2^{i^2}$ por 7. El cociente de dicha división, ¿es par o impar?

5. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ calcular $(3a^4 + 3a^2 - 2 : a^2 - 1)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1) $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 23\}$ $\mathcal{R}$ en $P(X)$ definida por:

$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \Delta B$ no contiene números impares.

a) Reflexividad: qvq $\forall A \in P(X)$: $A \mathcal{R} A$.

Sea $A \in P(X)$. $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow A \Delta A$ no tiene elementos $\Rightarrow A \Delta A$ no contiene números impares $\Leftrightarrow$ $A \mathcal{R} A$.

Simetría: qvq $\forall A, B \in P(X) / A \mathcal{R} B$: $B \mathcal{R} A$.

Sean $A, B \in P(X) / A \mathcal{R} B$. $A \Delta B = B \Delta A \Rightarrow$ $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \Delta B$ no contiene impares

$\Rightarrow B \Delta A$ no contiene números impares $\Leftrightarrow B \mathcal{R} A$.

Transitividad: qvq $\forall A, B, C \in P(X) / A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C$: $A \mathcal{R} C$.

Sean $A, B, C \in P(X) / A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C$.

$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \Delta B$ no contiene números impares

$B \mathcal{R} C \Leftrightarrow B \Delta C$ no contiene números impares

Si $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \Rightarrow A \Delta C$ no contiene números impares (si los tuviera, habría números impares en $A \Delta B$ o en $B \Delta C$, y eso contradice la hipótesis $A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C$)

Veamos que $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$:

A	B	C	$A \Delta B$	$B \Delta C$	$(A \Delta B) \cup (B \Delta C)$	$A \Delta C$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$\therefore \forall x \in A \Delta C$: $x \in (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \Rightarrow$

$\Rightarrow A \Delta C$ no contiene números impares $\Leftrightarrow$ $A \mathcal{R} C$

$\therefore \mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ es de equivalencia. $\square$

b) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$ $\quad \#\bar{A} = ?$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\bar{A} = \{ B \in P(X) : A \Delta B$ no contiene números impares$\}$

Quiero contar la cantidad de subconjuntos B de X que satisfacen que $A\Delta B$ no contiene números impares.

Veo qué impares deben estar en B, ya que la elección de los pares no afecta la condición que debe cumplirse.

Si $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \Delta B \Rightarrow$ todos los impares de A deben estar en $B \Leftrightarrow \{1, 3, 5, 7, 9\} \subseteq B$.

Si $x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \Delta B \Rightarrow$ no puede haber impares en B que no estén en A.

O sea que los únicos impares de B van a ser 1, 3, 5, 7 y 9, y sólo hay que decidir sobre los elementos del conjunto $X' = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 23 \wedge n = 2k\}$.

$23 = 2 \cdot 11 + 1 \Rightarrow 2k \leq 2 \cdot 11 + 1 \Rightarrow 2k \leq 2 \cdot 11 \Rightarrow k \leq 11 \Rightarrow \#X' = 11$.

Entonces: $\boxed{\#\bar{A} = \#P(X') = 2^{11}}$

13/5/2016

2) $P(n) := \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2}$. qvq $P(n)$ es V $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lo demuestro por inducción en n.

Caso base: $n=1$.

$$\sum_{i=1}^{2^1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2^1} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow P(1) \text{ es V.}$$

Paso inductivo: qvq $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$P(n+1) := \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$. H.I.: $P(n)$ es V.

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \overset{\text{H.I.}}{\geq} 1 + \frac{n}{2} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2} + \underbrace{\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}}}_{\to 2^n \text{ términos, ver } (*)} =$$

$2^n+1 \leq i \leq 2^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$= 1 + \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow P(n+1) \text{ es V.}$$

$\therefore P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $P(n)$ es V $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

(*) $2^{n+1} - (2^n+1) = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Hay 2^n números entre 2^n+1 y 2^{n+1} (incluyendo a 2^n+1 y a 2^{n+1}).

3) Primero cuento todas las formas de pintar 9 casillas de rojo y 6 de azul. Esto equivale a elegir 9 de las 15 casillas y pintarlas de rojo, pues el resto van a ser azules:

$$\binom{15}{9} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{(15-6)!\,6!} = \frac{15!}{9!\,6!}$$

Ahora debo contar las formas que no sirven, o sea las que tienen alguna fila completamente roja, y restarlas al total. Observemos que nunca puede haber más de una fila roja, pues ya hay 5 fichas rojas ubicadas y 4 para ubicar, que no alcanzan para llenar una fila.

Hay 3 posibilidades para la fila llena.

Por cada una de ellas, queda contar las formas de ubicar 4 fichas rojas en 10 casillas, o sea que hay

$3\binom{10}{6} = 3\binom{10}{4} = 3 \cdot \frac{10!}{6!\,4!}$ formas que no sirven

$\therefore$ Se puede hacer de $\frac{15!}{9!\,6!} - 3\frac{10!}{6!\,4!}$ maneras distintas. $\square$

4) Primero veamos las posibles congruencias de 2^i mod. 7:

$2^{3k} \equiv (2^3)^k \equiv 8^k \equiv 1^k \equiv 1\ (7)$

$2^{3k+1} \equiv (2^3)^k \cdot 2^1 \equiv 8^k \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2(7)$

$2^{3k+2} \equiv (2^3)^k \cdot 2^2 \equiv 8^k \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4(7)$

Entonces:

$2^{(3k)^2} \equiv (\underbrace{2^{3k}}_{\equiv 1})^{3k} \equiv 1^{3k} \equiv 1(7)$ ☆

$2^{(3k+1)^2} \equiv (\underbrace{2^{3k+1}}_{\equiv 2})^{3k+1} \equiv 2^{3k+1} \equiv 2(7)$ ☆

$2^{(3k+2)^2} \equiv (\underbrace{2^{3k+2}}_{\equiv 4})^{3k+2} \equiv (2^2)^{3k+2} \equiv 2^{6k+4} \equiv 2^{6k+3+1} \equiv 2^{3j+1} \equiv 2\ (7)$ ☆

$\sum_{i=0}^{99} 2^{i^2}$ tiene 100 términos. Observemos que, entre los primeros 99 $(2^{0^2}, 2^{1^2}, \dots, 2^{98^2})$ hay 33 para cada posible congruencia módulo 3 de i, o sea:

$\to 99 = 33 \cdot 3$
Empezamos contando desde 0

- 33 de la forma $2^{(3k)^2}$ ☆ $\Rightarrow$ ~~33~~ 33 de la forma $7k+1$
- ~~33~~ 33 de la forma $2^{(3k+1)^2}$ ☆ $\Rightarrow$ 33 de la forma $7k+2$
- 33 de la forma $2^{(3k+1)^2}$ ☆ $\Rightarrow$ 33 de la forma $7k+2$

} 66 en total

Sumamos sólo los restos, ya que $r_7(7k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, y tenemos

$r_7\left(\sum_{i=0}^{98} 2^{i^2}\right) = r_7(33 \cdot 1 + 66 \cdot 2) = r_7(r_7(33) + r_7(r_7(66) \cdot r_7(2))) =$

$= r_7(5 + r_7(3 \cdot 2)) = r_7(11) = \underline{\underline{4}}$

Entonces

$r_7\left(\sum_{i=0}^{99} 2^{i^2}\right) = r_7\left(\sum_{i=0}^{98} 2^{i^2} + 2^{99^2}\right) = r_7\left(r_7\left(\sum_{i=0}^{98} 2^{i^2}\right) + \underbrace{r_7(2^{99^2})}_{=1\ (☆)}\right) =$

$= r_7(4+1) = r_7(5) = \boxed{5}$

¡OJO! $2^0 = 1$

El cociente es impar, pues:

2^n es par $\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 2^{i^2}$ es par $\forall i \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{99} 2^{i^2}$ es par

$7q = \sum_{i=0}^{99} 2^{i^2} - 5 \Rightarrow 7q \equiv -5 \equiv 1 (2)$

$7 \equiv 1(2) \Rightarrow 7q \equiv q(2) \Rightarrow \boxed{q \equiv 1(2)}$ □

5) $(3a^4+3a^2-2 : a^2-1) = d$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 3a^4+3a^2-2 \\ d \mid a^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 3a^4+3a^2-2-3a^2(a^2-1) \Leftrightarrow d \mid 6a^2-2$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 6a^2-2 \\ d \mid a^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 6a^2-2-6(a^2-1) \Leftrightarrow d \mid 4$$

$\therefore\ d \in \{1, 2, 4\}$ considero sólo los valores positivos porque $(a:b) > 0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

Veamos si puede ser 4:

$d = 4 \Leftrightarrow 4 \mid 3a^4+3a^2-2 \ \wedge\ 4 \mid a^2-1$.

Reescribo $3a^4+3a^2-2 = 3a^2(a^2+1)-2$ y veo los posibles restos módulo 4:

a	0	1	2	3
a^2	0	1	0	1
a^2-1	3	0	3	0
$3a^2$	0	3	0	3
a^2+1	1	2	1	2
$3a^2(a^2+1)-2$	2	0	2	0

$\Rightarrow 4 \mid 3a^4+3a^2-2 \ \wedge\ 4 \mid a^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \equiv 1\,(4) \ \vee\ a \equiv 3\,(4)$

(*) OBS: $a \equiv 1\,(4) \vee a \equiv 3\,(4) \Leftrightarrow a \equiv 1\,(2)$

pues $4k+1 = 2(2k)+1 = 2k'+1$

$4k+3 = 4k+2+1 = 2(2k+1)+1 =$
$= 2k''+1$.

Veamos si puede ser 2. Para eso tiene que ocurrir que al menos un miembro no sea divisible por 4, ya que $2 \mid 4$ y entonces el MCD sería 4. (Además, obviamente, los dos deben ser divisibles por 2).

$4 \nmid a^2-1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} a \equiv 0\,(2) \Leftrightarrow a = 2k$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$

Veamos los posibles restos módulo 2 cuando $a=2k$ (ahora sólo nos queda elegir k para que el resto módulo 2 sea 0, pues ya sabemos que si $a=2k \Rightarrow 4 \nmid a^2-1$):

k	0	1
$a=2k$	0	0
a^2	0	0
a^2-1	1	1
a^2+1	1	1
$3a^2$	0	0
$3a^2(a^2+1)-2$	0	0

$$\Rightarrow \nexists\, a \in \mathbb{Z} \,/\, a=2k \wedge 2 \mid a^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists\, a \in \mathbb{Z} \,/\, (2 \mid a^2-1 \wedge 2 \mid 3a^2(a^2+1)-2) \wedge (4 \nmid a^2-1 \vee 4 \nmid 3a^2(a^2+1)-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3a^4+3a^2-2 : a^2-1) \neq 2 \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Como los únicos valores posibles para d son 1, 2 y 4, y probamos que para todos los a impares va a ser 4 y para todos los pares va a ser distinto de 2, el único valor que puede tomar cuando a es par es 1.

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} d = 4 \text{ si } 2 \nmid a \\ d = 1 \text{ si } 2 \mid a \end{array}}$$