

**Álgebra I — Final — 14/5/2021**

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

---

1. Demostrar por inducción matemática que para todo  $n \geq 2$  natural se cumple que:

$$\frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n}.$$

2. En el conjunto  $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, \dots, 12\})$  se define la relación  $\mathcal{R}$  del siguiente modo:  $A\mathcal{R}B$  si  $A$  y  $B$  tienen la misma cantidad de números pares. Probar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia y demostrar que existe una clase de equivalencia con más de 1000 elementos.
3. Sea  $a \in \mathbb{Z}$ . Calcular los posibles valores de  $(a^{60} + 6 : 560)$  y para cada valor hallado encontrar algún  $a \in \mathbb{Z}$  que lo realice.
4. Sea  $w$  una raíz primitiva de la unidad de orden 10. Calcular la parte real de  $w + w^3 + w^4 + w^8$ .
5. Consideramos el polinomio

$$P = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4 \in \mathbb{Q}[X]$$

Encuentre su factorización como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura múltiple. Indique cuáles son las raíces de este polinomio y cuáles sus multiplicidades.