Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Segundo parcial - 05/07/2019

1. Hallar **todos** los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(a^{318} + 29a + 7 : 81) = 3$.

2. Hallar **todos** los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales se cumple simultáneamente:

$$65a + 145b = 5 \qquad \text{y} \qquad (a+b)^{2001} \equiv 4 \pmod 5.$$

3. Sea Sea $w \in G_{39}$ raíz 39-na primitiva de la unidad. Hallar **todos** los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{j=0}^{5n+1} w^{13j} = 0 \qquad \text{y} \qquad w^{15} \in G_{3n+7}.$$

(Resumir toda la información obtenida para n en una única ecuación de congruencia).

4. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 - 2X^3 + X \text{ y } f_{n+1} = (X+1)f_n' + 2f_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -1 es raíz exactamente doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $f = 2X^5 - 5X^4 + 6X^3 + 10X^2 - 36X + 15$. Factorizar f como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $\sqrt{3}$ es raíz de f.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1:

Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(a^{318}+29a+7 : 81) = 3$

Quiero $(a^{318}+29a+7 : 81) = 3$

Descompongo 81 en producto de primos

$81 = 3^4$

Para que $(a^{318}+29a+7 : 81) = 3$ necesito

que $3 \mid a^{318}+29a+7$

pero que $9 \nmid a^{318}+29a+7$

• Caso $a \equiv 0 \mod 3$ Lo analizo aparte porque después quiero usar Fermat

$a^{318}+29a+7 \equiv 7 \equiv 1 \mod 3$

$\Rightarrow$ si $3 \mid a$ no da el resultado que busco

• Si $a \not\equiv 0 \mod 3 \Rightarrow$ como 3 es primo $(a:3)=1$

$\Rightarrow$ por Pequeño Teorema de Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$

$a^{318} = (a^2)^{159} \equiv 1^{159} \equiv 1 \mod 3$

$a^{318}+29a+7 \equiv 1+29a+7 \equiv 2a+2 \equiv 0 \mod 3$

$\Leftrightarrow 2a \equiv -2 \equiv 1 \mod 3$

$(2:3)=1$ existe inverso multiplicativo $\leftarrow 2.2a \equiv 2 \mod 3$

$a \equiv 2 \mod 3$

Solo si $a \equiv 2 \mod 3$ $\quad 3 \mid a^{318}+29a+7$

Ahora tengo que descartar los casos en que

$9 \mid a^{318}+29a+7$ ya que si esto sucede

$(a^{318} + 9a + 7 : 81) \neq 3$

Entonces:

Si $a \equiv 2 \mod 3$

a puede ser:

$a \equiv 2 \mod 9$ (1)

$a \equiv 5 \mod 9$ (2)

$a \equiv 8 \mod 9$ (3)

(1) Si $a \equiv 2 \mod 9$

$a^{318} + 29 . a + 7 \equiv 2^{318} + 29 . 2 + 7 \equiv 2^{318} + 2 \mod 9$

$2^{318} = (2^3)^{106} = (8)^{106} \equiv (-1)^{106} \equiv 1 \mod 9$

$\Rightarrow a^{318} + 29a + 7 \equiv 1 + 2 \equiv 3 \mod 9$

$\hookrightarrow \neq 0$

$9 \nmid a^{318} + 29a + 7$ y $a \equiv 2 \mod 9$

Si $a \equiv 2 \mod 9$ es solución

(2) Si $a \equiv 5 \mod 9$

$a^{318} + 29 . a + 7 \equiv 5^{318} + 29 . 5 + 7 \equiv 5^{318} + 8 \mod 9$

$5^{318} = (5^3)^{106} = (125)^{106} \equiv (-1)^{106} \equiv 1 \mod 9$

$\Rightarrow a^{318} + 29a + 7 \equiv 1 + 8 \equiv 9 \equiv 0 \mod 9$

$a \equiv 5 \mod 9$ no es solución

(3) Si $a \equiv 8 \mod 9$

$a \equiv -1 \mod 9$

$\Rightarrow a^{318} + 29 \cdot a + 7 \equiv (-1)^{318} + 29(-1) + 7 \equiv 1 + 7 + 7 \equiv 6 \mod 9$
$\neq 0$

$9 \nmid a^{318} + 29a + 7$

si $a \equiv 8 \mod 9$ $\Rightarrow$ $a \equiv 8 \mod 9$ es solución ✓

Rta: $(a^{318} + 29a + 7 : 81) = 3$ si y solo si $a \equiv 2 \mod 9$ ó $a \equiv 8 \mod 9$ ✓

Ej 2:

Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que cumplen

$65a + 145b = 5$ y $(a+b)^{2001} \equiv 4 \mod 5$

Primero resuelvo $65a + 145b = 5$ $a, b \in \mathbb{Z}$

$(65 : 145) = 5$ $5 | 5$ entonces existe solución a esta ecuación diofántica

$\frac{65}{5} = 13$

$\frac{145}{5} = 29$

y ~~todas~~ las soluciones van a ser

$a = a_0 + 29\ell$

$b = b_0 - 13\ell$ con $\ell \in \mathbb{Z}$

y a_0 b_0 una solución particular

Busco una solución particular:

$65a_0 + 145b_0 = 5 \Leftrightarrow 13a_0 + 29b_0 = 1$

$13a_0 + 29b_0 = 1$

$13a_0 = 1 - 29b_0$

$a_0 = \frac{1 - 29b_0}{13} = -2b_0 + \underbrace{\frac{1 - 3b_0}{13}}_{c}$

$$c = \frac{1-3b_0}{13} \qquad 13c = 1-3b_0$$

$$13c + 3b_0 = 1$$

$$3b_0 = 1 - 13c$$

$$b_0 = \frac{1-13c}{3} = -4c + \underbrace{\frac{1-c}{3}}_{d}$$

$$d = \frac{1-c}{3} \qquad 3d = 1-c$$

$$3d + c = 1$$

$d=0$ $c=1$ es solución

$\Rightarrow$ $b_0 = -4$ es solución

$a_0 = 9$ particular

$\Rightarrow$ todas las soluciones a $65a + 145b = 5$

son $a = 9 + 29l$ $\quad l \in \mathbb{Z}$

$b = -4 - 13l$

Verifico:

$65(9+29l) + 145(-4-13l) =$

$585 + \cancel{1885l} + (-580) + (-\cancel{1885l}) = 5$ ✓

Ahora busco $(a+b)^{2001} \equiv 4 \mod 5$

$$a+b = 9 + 29l - 4 - 13l = 5 + 16l$$

$$(5+16l)^{2001} \equiv 4 \pmod 5$$

Por Pequeño teorema de Fermat, como 5 es primo

$$(5+16l)^4 \equiv \begin{cases} 0 \mod 5 & \text{si } 5+16l \equiv 0 \mod 5 \quad (1) \\ 1 \mod 5 & \text{si } 5+16l \not\equiv 0 \mod 5 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $5+16\,l \equiv 0 \mod 5$

$\Leftrightarrow$ $16\,l \equiv 0 \mod 5$

$(16:5)=1 \Rightarrow$ por Gauss

$\Leftrightarrow$ $l \equiv 0 \mod 5$

Si $l \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow (5+16\,l)^{2001} \equiv 0 \not\equiv 4 \mod 5$

$\Rightarrow l \not\equiv 0 \mod 5$ ✓

(2) $5+16\,l \not\equiv 0 \mod 5$

$\Rightarrow (5+16l)^{2001} = \left((5+16l)^4\right)^{500} \cdot (5+16l) \equiv 1^{500} \cdot (5+16\,l)$

$\equiv 5+16\,l \mod 5$

Busco l / $5+16\,l \equiv 4 \mod 5$

$5+16\,l \equiv 16l \equiv l \equiv 4 \mod 5$

$\rightsquigarrow (5+16l)^{2001} \equiv 4 \mod 5 \Leftrightarrow l \equiv 4 \mod 5$ ✓

Retomando: $a = 9+29\,l$

$b = -4-13\,l$

y $l = 5k+4 \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a = 9+29(5k+4) = 9+145k+76 = 125+145k$

$b = -4-13(5k+4) = -4-65k-52 = -56-65k$

<u>Rta</u>: Todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que cumplen lo pedido son $a = 125+145k$

$b = -56-65k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$ ✓

Ej 3: $w \in G_{39}$ primitiva. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{j=0}^{5n+1} w^{13j} = 0 \quad y \quad w^{15} \in G_{3n+7}$$

$$\sum_{j=0}^{5n+1} w^{13j} = \frac{(w^{13})^{5n+2} - 1}{w^{13} - 1}$$ como $w \in G_{39}$ es primitiva $w^{13} \neq 1$

$$\Rightarrow \frac{(w^{13})^{5n+2} - 1}{w^{13} - 1} = 0 \iff (w^{13})^{5n+2} - 1 = 0$$

$$\iff (w^{13})^{5n+2} = 1$$

$$w^{65n+26} = 1 \underset{\substack{w \text{ primitiva} \\ \in G_{39}}}{\iff} 65n+26 \equiv 0 \mod 39$$

$$65n + 26 \equiv 26n + 26 \equiv 0 \mod 39$$

$$\iff 26(n+1) \equiv 0 \mod 39$$

$$\underset{39 = 13.3}{\iff} \begin{cases} 26(n+1) \equiv 0 \mod 13 & \text{se cumple } \forall n \text{ pues } 26 = 2.13 \\ 26(n+1) \equiv 0 \mod 3 & ⊛ \end{cases}$$

⊛ $26(n+1) \equiv 0 \mod 3 \underset{(26:3)=1 \text{ Gauss}}{\iff} n+1 \equiv 0 \mod 3$

$n \equiv 2 \mod 3$

$\rightsquigarrow w^{65n+26} = 1 \iff n \equiv 2 \mod 3 \quad n \in \mathbb{N}$

Ahora busco $w^{15} \in G_{3n+7}$

$\Leftrightarrow (w^{15})^{3n+7} = 1$

Nuevamente, como $w \in G_{39}$ es primitiva, esto se cumple

$\Leftrightarrow 15(3n+7) \equiv 0 \mod 39$

$45n + 105 \equiv 6n + 27 \equiv 0 \mod 39$

$\underset{39=13.3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6n+27 \equiv 0 \mod 13 & (*) \\ 6n+27 \equiv 0 \mod 3 & \text{se cumple siempre pues } 6 \equiv 0 \ (3) \text{ y } 27 \equiv 0 \ (3) \end{cases}$

$(*)$ $6n+27 \equiv 0 \mod 13$

$\Leftrightarrow 6n \equiv -1 \mod 13$ $\quad (6:13)=1 \Rightarrow$ existe inverso.

$2.6n \equiv -1.2 \mod 13$

$-n \equiv -2 \mod 13$

$n \equiv 2 \mod 13$

$\rightsquigarrow w^{15} \in G_{3n+7} \Leftrightarrow n \equiv 2 \mod 13$

Entonces busco todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$\begin{cases} n \equiv 2 \mod 13 \\ n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$ Como $(13:3)=1$ el teorema Chino del Resto me asegura una única solución mod 39

Una solución particular a este sistema es 2

$\Rightarrow n \equiv 2 \mod 39$

ta: Como n es un natural. La solución del ejercicio son todos los $n = 39k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

Ej 4:

$(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[x]$

$f_1 = x^5 - 2x^3 + x \qquad f_{n+1} = (x+1) f_n' + 2 f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Probar que -1 es raíz exactamente doble de f_n $\forall n \in \mathbb{N}$

Lo pruebo por inducción.

Caso base $n=1$

$f_1 = x^5 - 2x^3 + x$ tiene a -1 como raíz exactamente doble $\Longleftrightarrow \begin{cases} f_1(-1) = 0 \\ f_1'(-1) = 0 \\ f_1''(-1) \neq 0 \end{cases}$

$f_1(-1) = (-1)^5 - 2(-1)^3 + (-1) = -1 + 2 - 1 = 0$ ✓

$f' = 5x^4 - 6x^2 + 1$

$f'(-1) = 5(-1)^4 - 6(-1)^2 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$ ✓

$f'' = 20x^3 - 12x$

$f''(-1) = 20(-1)^3 - 12(-1) = -20 + 12 = -8 \neq 0$ ✓

Probado el caso base, hago el paso inductivo

Si f_n tiene a -1 como raíz exactamente doble, f_{n+1} también?

$f_{n+1} \underset{\text{def}}{=} (x+1) f_n' + 2 f_n$

Por hip inductiva f_n tiene a -1 como raiz exactamente doble $\Rightarrow f_n = (x+1)^2 p$ tq $(x+1) \nmid p$

$f'_n = 2(x+1).p + (x+1)^2 p' = (x+1)(2p+(x+1)p')$

$\rightsquigarrow f_{n+1} = (x+1)(x+1)(2p+(x+1)p') + 2(x+1)^2 p$

$f_{n+1} = (x+1)^2 \underbrace{(2p+(x+1)p'+2p)}_{q}$

Tengo que ver que -1 no es raiz de q

$q = 2p+(x+1)p'+2p = 4p+(x+1)p'$

$q(-1) = 4(p(-1)) + \underbrace{(-1+1)}_{=0}p' = 4p(-1) \neq 0$ pues -1 no es raiz de p. (ya habia dicho que $(x+1) \nmid p$)

$\Rightarrow (x+1) \nmid q$

$\therefore f_{n+1}$ tiene a -1 como raiz con multiplicidad exactamente 2

$(x+1)^2 \mid f_{n+1}$ $\quad (x+1)^3 \nmid f_{n+1}$ $\square$

Ej 5: $f = 2x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 36x + 15$

factorizar f como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ sabiendo que $\sqrt{3}$ es raiz de f.

Como $\sqrt{3}$ es raiz de f y $f \in \mathbb{Q}[x]$, sé que $-\sqrt{3}$ también es raiz y por lo tanto

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = (x^2-3) \mid f$$

Hago la división:

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 36x + 15 & x^2 - 3 \\
\underline{2x^5 - 6x^3} & 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5 \\
-5x^4 + 12x^3 + 10x^2 - 36x + 15 & \\
\underline{-5x^4 + 15x^2} & \\
12x^3 - 5x^2 - 36x + 15 & \\
\underline{12x^3 - 36x} & \\
-5x^2 + 15 & \\
\underline{-5x^2 + 15} & \\
0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow f = (x^2-3)(2x^3 - 5x^2 + 12x - 5)$

Ahora tengo que hallar las raices de

$g = 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

Como $\in \mathbb{Z}[x]$ busco raices racionales con lema de gauss

Si $\frac{p}{q}$ es raiz $\Rightarrow p \mid 5$

$q \mid 2$

Posibles raices racionales:

$$\{\pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$$

Voy evaluando para ver si alguna es raiz

$g(1) = 2-5+12-5 = 4 \neq 0$

$g(-1) = -24 \neq 0$

$g(5/2) = 25 \neq 0$

$g(-5/2) \neq 0$

$g(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 5(\frac{1}{2})^2 + 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 6 - 5 = 0$

$g(-\frac{1}{2}) \neq 0$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{2}$ es raiz. Divido g por $(x-\frac{1}{2})$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5 & x - \frac{1}{2} \\ \underline{2x^3 - x^2} & 2x^2 - 4x + 10 \\ 0 \quad -4x^2 + 12x - 5 & \\ \quad \underline{-4x^2 + 2x} & \\ \qquad\qquad 10x - 5 & \\ \qquad\qquad \underline{10x - 5} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $f = (x^2-3)(x-\frac{1}{2})(2x^2-4x+10)$

Busco las raices de $h = 2x^2-4x+10$ con resolvente

$r_1, r_2 = \frac{4 \pm w}{2.2}$ con $w^2 = (-4)^2 - 4.2.10$

$w^2 = -64$

$w_1 = 8i \quad w_2 = -8i$

$r_1 = \frac{4+8i}{4} = 1+2i$ Son las raices de h

$r_2 = \frac{4-8i}{4} = 1-2i$

$\Rightarrow$ Factorizado en $\mathbb{C}[x]$

$$f = 2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\tfrac{1}{2})(x-(1+2i))(x-(1-2i))$$

es producto de irreducibles pues son polinomios de grado 1.

✓

Factorizado en $\mathbb{R}[x]$

$$f = 2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\tfrac{1}{2})\underbrace{(x^2-2x+5)}$$

✓

este polinomio es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ pues es de grado 2 con discriminante negativo $\therefore$ tiene raíces no reales.

Factorizado en $\mathbb{Q}[x]$

$$f = 2\underbrace{(x^2-3)}(x-\tfrac{1}{2})\underbrace{(x^2-2x+5)}$$

✓

irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ pues es de grado 2 y sus raíces no son racionales

irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ por el mismo argumento que en $\mathbb{R}[x]$

Excelente parcial!
Felicitaciones!