FINAL 9/3/12 ✓

1) ENUNCIAR Y DEMOSTRAR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

2) ENUNCIAR Y DEMOSTRAR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES DERIVABLES EN $\mathbb{R}^2$.

3) SEAN $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = f\left(x^4 + y^4, e^{3x^2 - 2y^2} - 1\right)$, y $f_y(0,0) \neq 0$. DEMOSTRAR QUE $(0,0)$ ES UN PUNTO CRÍTICO Y ANALIZAR SU NATURALEZA.

4) SEA $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ DE CLASE $C^1$, $F\left(\cos^2 t + \sin t - 1, \sin 3t^2\right) = (-17, 5)\ \forall t$. PROBAR Q $J_F^{(0,0)} = 0$.

09/03/12

① Enunciar y demostrar el TFC I

F es continua $[\ ]$

F es derivable $(\ )$

$F'(x)=f(x)$

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Sea $F=\int_a^x f(t)dt$ entonces.

Demo.

1) Quiero ver que F es derivable en $(a,b)$ y $F'(x)=f(x)$.

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}-f(x)=0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\int_a^x f(t)dt}-\int_x^{x+h}f(t)\,dt-\cancel{\int_a^x f(t)dt}}{h}-f(x)=0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt-f(x)=*$$

$$f(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\cdot\frac{h}{h}=\frac{f(x)}{h}\cdot\int_x^{x+h}1=\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h}f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow * =\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x)\,dx=0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)-f(x)\,dt}{h}=0\rightarrow **$$

$t\in[x,x+h]\Rightarrow|t-x|<|x-(x+h)|=h<\delta$.

$\Rightarrow$ por continuidad de f, puedo afirmar que $\exists\,\varepsilon>0\,/\,|f(t)-f(x)|<\varepsilon$

**

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)-f(x)\,dt}{h}\leq\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}\varepsilon}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon\cdot(x+h-x)}{h}=\frac{\varepsilon h}{h}=\boxed{\varepsilon}$$

Falta ver que F es continua en a y en b

O sea $\lim_{x\to a^+}F(x)=F(a)\Leftrightarrow\lim_{x\to a^+}|F(x)-F(a)|=0$

Sea $s=\max\{|\max\{f\}|,|\min\{f\}|\}$. ($s<\infty$ pues F continua). Entonces sea P una partición de $A_x$ y $M_i$ el máximo en norma de f en el intervalo $\Delta i$

09/03/12

Entonces

$|F(x)-F(a)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^0 f(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f| \leq \inf(|f|\,P) \leq S(|f|,P) \leq \sum M_i \Delta_i \leq S. \sum \Delta_i$
$\leq S.(x-a)$

$\lim_{x\to a} |F(x)-F(a)| \leq \lim_{x\to a} S(x-a) \leq 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} |F(x)-F(a)| = 0}$

ídem para b.

② Probar Lagrange en $\mathbb{R}^2$

③ $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x,y) = f(x^4+y^4\ ,\ e^{3x^2-2y^2}-1)$, $f_y(0,0) \neq 0$

Mostrar que $(0,0)$ es pto crítico de $g$ y mostrar su naturaleza

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad h(x,y) = (x^4+y^4\ ,\ e^{3x^2-2y^2}-1)$. $\quad h(0,0) = (0,0)$

$Dg = D(f\circ h) = Df(h)\cdot D_h$ $\qquad D_h = \begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 \\ 6x.e^{3x^2-2y^2} & -4y\,e^{3x^2-2y^2} \end{pmatrix}$

$g_x = f_x(h(x,y)).\,4x^3 + f_y(h(x,y)).\,6x.e^{3x^2-2y^2}$

$g_y = f_x(h(x,y)).\,4y^3 + f_y(h(x,y)).\,-4y.e^{3x^2-2y^2}$ $\qquad D_h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\nabla g = \nabla_f(h(0,0)).\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{(0,0)}$

$g_{xx} = f_{xx}.(h(x,y)).\,4x^3 + f_x(h(x,y)).\,12x^2 + f_{xy}(h(x,y)).\,6x.e^{3x^2-2y^2} + f_y(h(x,y)).\left(6.e^{3x^2-2y^2} + 6x.6x.e^{\cdots}\right)$

$\boxed{g_{xx}(0,0) =}\ 0 + 0 + 0 + f_y(0,0).\,6 = \boxed{f_y(0,0).6}$

$g_{xy} = f_{yx}(h(x,y)).\,4x^3 + f_{yy}(h(x,y))\,6x.e^{3x^2-2y^2} + f_y(h(x,y)).\,6x.(-4y.e^{3x^2-2y^2}$

$\boxed{g_{xy}(0,0) =}\ 0 + 0 + 0 = \boxed{0}$

$g_{yx} = 4y^3.\,f_{yx}(h(x,y)) + f_{xy}(h(x,y))\,(-4).y.e^{3x^2-2y^2} + f_y(h(x,y)).\,(-4)y.6x\ e^{\cdots}$

$\boxed{g_{yx}(0,0) =}\ 0 + 0 + 0 + 0 = \boxed{0}$

$g_{yy} = f_{yx}(h(x,y)).\,4y^3 + 12y^2.\,f_x(h(x,y)) + f_{yy}(h(x,y)).(-4)y.e^{\cdots} + f_y(h(x,y)).\begin{pmatrix} (-4)y.(-4)y.e^{\cdots} \\ + \\ -4.e^{\cdots} \end{pmatrix}$

$g_{yy}(0,0) = 0 + 0 + 0 + (-4).\,f_y(0,0) = \boxed{-4 f_y(0,0)}$

$\Rightarrow$ det $< 0$
$\Rightarrow$ Punto silla

$\det(H_g(0,0)) = \det \begin{pmatrix} 6 f_y(0,0) & 0 \\ 0 & -4 f_y(0,0) \end{pmatrix} = \underbrace{-24 (f_y)^2}_{>0}$ pues $f_y \neq 0$

09/03/12

(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad f\in\mathcal{C}^1$, $\quad f(\underbrace{\cos^2(t)+\sin(t)-1 \quad , \sin(3t^2)}_{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2})=(-17,5)$

Probar $J_F(0,0)=0$

Supongo que ~~$\exists x_0\in\mathbb{R}^2$~~ $\nexists$ $J_F(0,0)\neq 0$. Entonces como $f\in\mathcal{C}^1$, se le puede aplicar el teorema de la función inversa, $\exists$ U, V al rededor de $(0,0)$ y $f(0,0)$ respectivamente tal que f es biyectiva.

En particular f es inyectiva.

Consideremos $\varepsilon\in\mathbb{R}$. Tal que $h(\varepsilon)\in U$ $\quad$ (Que existe pues h es continua y $h(0)\in U$
$\varepsilon\neq 0$ $\quad\Rightarrow\exists$ Bola al rededor de (0,0) tal que hay infinitos puntos $h(x_i)$)

Entonces

$f(0,0)=f(h(0))=(-17,5)$

$f(\cdots)=f(h(\varepsilon))=(-17,5)$

Pero como $h(0)\in U$ y $h(\varepsilon)\in U$, y $f(h(0))=f(h(\varepsilon))$, entonces f no es inyectiva $\Rightarrow$ Abs