1	2	3	4	Calificación
21	25	24	25	95

A

Probabilidad y Estadística (C)

Primer parcial - 2C 2018 - 11/10/2018

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. **Realizar cada ejercicio en hoja separada.** [redacted]

Turno: Tarde: 14 a 17 hs Noche: 19 a 22 hs N° de hojas entregadas: 4

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (25 p) *"La Flor de Muzza"* es una una pequeña pizzería de barrio que vende pizzas con tres medios de pago: Visa, MasterCard o efectivo. Se sabe que un 50% de los clientes tiene tarjeta Visa y un 35% tiene MasterCard. Se sabe también que de los clientes que tienen Visa, un 30% tiene también MasterCard y un 70% tiene efectivo. Mientras que cinco de cada siete de los clientes que tienen MasterCard, tienen también efectivo. Se sabe también que un 10% de los clientes cuenta con los tres medios de pago. Por último, todo cliente cuenta con alguno de los tres medios de pago. Si no funciona el posnet (es decir, no puede aceptar tarjetas),

9 a) (9 p) ¿Cuál es la probabilidad de que *"La Flor de Muzza"* pierda una venta?

"Pura fugazzeta" es otra pizzería, donde la probabilidad de perder una venta por que no funciona el postnet es 0.25.

6 b) (6 p) Si *"Pura fugazzeta"* recibe 10 pedidos independientes en una noche, ¿cuál es la probabilidad de que pierda dos o más ventas?

2 c) (6 p) Si el dueño de la pizzería *"Pura fugazzeta"* decide llamar al servicio técnico del posnet en el momento en que pierde la segunda venta de la noche, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido 10 o más pedidos al momento de llamar al técnico?

4 d) (4 p) ¿Cuál es el número esperado de pedidos hasta que pierde la primera venta?

2. (25 puntos) En la Selva Misionera conviven tres especies de Colibrí, que en adelante denotaremos con A, B y C. Cada una de ellas representa un 60%, 30% y 10% de la población de colibries, respectivamente. El número de huevos que una hembra pone a lo largo de su vida se modela con una distribución Poisson, de parámetro $\lambda_A = 12$, $\lambda_B = 10$ y $\lambda_C = 4$ para las especies A, B y C, respectivamente.

2 a) (2 p) Se elige un pajaro al azar. ¿De que especie diría que es? ¿Por qué?

5 b) (5 p) Hallar la probabilidad de que una hembra de la especie A ponga $k = 5$ huevos a lo largo de su vida.

7 c) (7 p) Hallar la probabilidad de que una hembra elegida al azar ponga $k = 5$ huevo a lo largo de su vida.

6 d) (6 p) Se sabe que una hembra elegida al azar ha puesto $k = 5$ huevos a lo largo de su vida. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la especie A?

5 e) (5 p) Se sabe que una hembra elegida al azar ha puesto $k = 5$ huevos a lo largo de su vida. ¿De que especie diría que es? ¿Por qué?

3. (25 p) Se sabe que la distribución del peso en kilogramos de los peces dorados en el Río Paraná es $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Más aún, el 85% de los dorados pesan entre 3 y 15 kg, y el 4% pesa más de 15 kg. En un concurso de pesca si un dorado pesa más de 16 kg suma 5 puntos, si pesa entre 16 y 12 kg suma 3 puntos, si pesa entre 12 y 8 suma un punto, y un pez de menor peso suma 0 puntos.

8 a) (8 p) Hallar μ y σ.

Suponga a partir de ahora que $\mu = 8, \sigma = 4$.

6 b) (6 p) Sea Y el puntaje obtenido al sacar un pez dorado; hallar p_Y, la función de probabilidad puntual de Y y calcule $\mathbb{E}(Y)$.

c) (4 p) Un participante saca primero un pez y luego otro. ¿Cuál es la probabilidad de que sume 6 puntos?

d) (7 p) Se sabe que en el torneo anterior se pescó a un dorado de 21 kg. Hallar un natural n de forma tal que si se pescan n dorados se encuentre al menos uno de 21 kg o más, con probabilidad mayor a $\frac{1}{2}$.

4. (25 p) Dado un vector aleatorio continuo (X, Y) con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) (1 p) Gráfique en el plano el conjunto de puntos donde f_{XY} es diferente de cero.

b) (6 p) Hallar f_X y calcular $\mathbb{E}(X)$.

c) (7 p) Hallar f_Y.

d) (7 p) Calcular $\mathbb{E}(Y)$.

e) (4 p) ¿Son X e Y independientes?

[redacted]

Hoja 1 / 4

2) a) Como en la selva la distribución de las 3 posibles especies está dada con las proporciones: A = 0,6 , B = 0,3 y C = 0,1 , lo esto me dice que del total de especies, la probabilidad que encuentre una de tipo A es del 60%, del tipo B es del 30% y del C es del 10%, por lo tanto lo mas esperable en promedio sería encontrar una de la especie A

b) $A \sim P(12)$

$P(\text{"A pone 5 huevos"}) = P(A=5) = \frac{12^5}{5!} e^{-12} \cong 0{,}0127$

c) $A \sim P(12)$, $B \sim P(10)$, $C \sim P(4)$

$P(\text{"hembra pone 5 huevos"}) = P(\text{"A pone 5"} \cup \text{"B pone 5"} \cup \text{"C pone 5"})$

$= P(A=5|A) \cdot P(A) + P(B=5|B) \cdot P(B) + P(C=5|C) P(C)$

donde $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ son las probab de elegir a cada una de las especies

$P(A=5|A) \cong 0{,}0127$ $\qquad P(A) = 0{,}6$

$P(B=5|B) \cong 0{,}0378$ $\qquad P(B) = 0{,}3$

$P(C=5|C) \cong 0{,}156$ $\qquad P(C) = 0{,}1$

$\Rightarrow 0{,}0127 \cdot 0{,}6 + 0{,}0378 \cdot 0{,}3 + 0{,}156 \cdot 0{,}1 \cong \underbrace{0{,}03456}_{} = P(H) = \text{"pone 5 huevos"}$

d) $P(A|\text{"pone 5 huevos"}) \underset{\text{Bayes}}{=} P(H|A) \cdot \frac{P(A)}{P(H)} = P(A=5) \cdot \frac{P(A)}{P(H)} = \frac{0{,}0127 \cdot 0{,}6}{0{,}03456}$

$\cong \underbrace{0{,}2205}_{}$

e) Puede ser de A, B o C, ya vemos las distintas probab.

~~P(A=5)~~ $P(A|H) = 0{,}2205$

calculado en el d)

$$P(B \mid H) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H \mid B)\, P(B)}{P(H)} \cong 0{,}328125$$

$$P(C \mid H) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(H \mid C)\, P(C)}{P(H)} \cong 0{,}45158$$

Entre estas 3 probs, la mas alta es la de la especie C, entonces en promedio diría que si la especie fuera 5 [illegible], entonces debe ser la especie C

3) a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad P(3 \leq X \leq 15) = 0{,}85 \qquad P(X \geq 15) = 0{,}04$

$$\text{①}\ P(3 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 3)$$
$$\text{②}\ P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

Sumo ambas ecuaciones

$\Rightarrow$ ① + ② $\Rightarrow 0{,}85 + 0{,}04 = P(X \leq 15) - P(X \leq 3) + 1 - P(X \leq 15)$

$\Leftrightarrow 0{,}89 = 1 - P(X \leq 3)$

$\Leftrightarrow P(X \leq 3) = 0{,}11$

$\Leftrightarrow \cancel{1-}P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}11$

$\Leftrightarrow 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu-3}{\sigma}\right) = 0{,}11$

$\Leftrightarrow 0{,}89 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu-3}{\sigma}\right) \rightsquigarrow$ Por tabla $\frac{\mu-3}{\sigma} = 1{,}23$

~~Tengo entonces que P(X~~

$\cancel{\text{①}\ P(X \leq 15) - P(X \leq 3) = \underbrace{1-P(X \geq 15)}_{1-0{,}04} - P(X \leq 3) = 0{,}96 - P(X \leq 3) = 0{,}85}$

$\Rightarrow$ Tengo entonces que ~~$P(X \leq 3) = 0{,}11 \Leftrightarrow 1-$~~
$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu-3}{\sigma}\right) = 0{,}11$ y que $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = \underbrace{1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right)}_{③}$

De ③ sale que $1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}04$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}96 \Rightarrow$ Por tabla, $\frac{15-\mu}{\sigma} = 1{,}76$

[redacted]

Mag 2/4

Teniendo lo $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq -3\right)=$

$$\begin{cases} \frac{\mu-3}{\sigma} = 1{,}23 \\ \frac{15-\mu}{\sigma} = 1{,}76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu-3}{\sigma} = 1{,}23 \\ 15-1{,}76\sigma = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 15-1{,}76\sigma-3 &= 1{,}23\sigma \\ 12 &= 3\sigma \\ 4 &= \sigma \\ \mu = 15-1{,}76\cdot 4 &\simeq 8 \end{aligned}$$

b) $$Y = \begin{cases} 5 & \text{si } X \geq 16 \\ 3 & \text{si } 12 \leq X \leq 16 \\ 1 & \text{si } 8 \leq X \leq 12 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$ $P(5)$ $X \sim N(8,16)$

$P(Y=5) = P(X \geq 16) = \overbrace{1-P(X\leq 16)}^{0{,}0228}$, $P\left(\frac{X-8}{4} \leq 2\right) = 0{,}9772$

$P(Y=3) = P(12 \leq X \leq 16) = \underbrace{\underbrace{P(X\leq 16)}_{0{,}9772} - P(X \leq 12)}_{=0{,}1359}$ $P\left(\frac{X-8}{4} \leq 1\right) = 0{,}8413$

$P(Y=1) = P(8 \leq X \leq 12) = \underbrace{\underbrace{P(X \leq 12)}_{0{,}8413} - P(X \leq 8)}_{=0{,}3413}$ $P\left(\frac{X-8}{4} \leq 0\right) = 0{,}5$

$P(Y=0) = P(X \leq 8) = 0{,}5$

Se tiene entonces que P_Y:

$P(Y=5) = 0{,}0228$ $P(Y=1) = 0{,}3413$

$P(Y=3) = 0{,}1359$ $P(Y=0) = 0{,}5$

y la $E[Y] = P(Y=5)\cdot 5 + P(Y=3)\cdot 3 + P(Y=1)\cdot 1 + P(Y=0)\cdot 0$

$\Rightarrow 0{,}0228\cdot 5 + 0{,}1359\cdot 3 + 0{,}3413\cdot 1 = 0{,}863$

c) $P(\text{“suma 6”}) = P(\text{“sale 5 y luego 1”} \cup \text{“sale 1 y luego 5”} \cup \text{“sale 3 y luego 3”})$

$= P(Y=5)\cdot P(Y=1) + P(Y=1)P(Y=5) + P(Y=3)\cdot P(Y=3)$

$\simeq 0{,}034$

d) $Z \sim Bi(n, P(X \geq 21))$ donde $X \sim N(8,16)$ y

$P(X \geq 21) = P\left(\frac{X-8}{4} \geq 3,25\right) = 1 - \underbrace{P\left(\frac{X-8}{4} \leq 3,25\right)}_{\text{por tabla} = 0,9994} = 0,0006$

P("salga al menos un dorado mayor a 21 kg" en n repeticiones")

= P("X sea al menos 1 vez ≥ 21 en n repeticiones")

$= P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) \geq 1/2$

$\Leftrightarrow P(Z=0) \leq 1/2 \Leftrightarrow (1-0,0006)^n \leq 1/2$

$(0,9994)^n \leq 1/2$

$\Rightarrow$ Si tomo $n = 1200$ ok

con $n = 1155$ alcanza

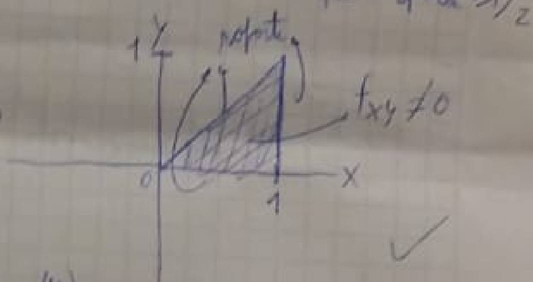
$\Rightarrow 0,4866 \leq 1/2 \Rightarrow$ este n cumple

$n \geq \log_{0,9994} 1/2$

$n \geq 1154$

Si tomo $n < 1154$, no cumple que la proba $\geq 1/2$

4) a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \Rightarrow$



b) $f_X = \int f_{XY} = \frac{1}{x} I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,x)}(y)$

$f_X(x) = I_{(0,1)}(x) \int_0^x \frac{1}{x}\, dy = I_{(0,1)}(x) \frac{1}{x} \int_0^x 1\, dy = I_{(0,1)}(x) \frac{1}{x} \left[y \Big|_0^x \right] = I_{(0,1)}(x) \frac{1}{x} \cdot (x - 0) = I_{(0,1)}$

$= 1 \cdot I_{(0,1)}(x)$

$E(X) = \int_0^1 x f_X \, dx = \int_0^1 x \cdot 1 = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

c) $f_Y \to$ Tenemos que $\begin{matrix} 0 < y < 1 \\ y < x < 1 \end{matrix} \Rightarrow f_Y = I_{(0,1)}(y) \cdot \int_y^1 \frac{1}{x} = I_{(0,1)}(y) \cdot \left[\ln(x) \Big|_y^1 \right]$

$= [\ln(1) - \ln(y)] I_{(0,1)}(y)$

$= -\ln(y) I_{(0,1)}(y)$

[redacted] Hoja 3/4

d) $E(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{XY} \, I_{(0,1)}(x) \, I_{(0,x)}(y)$

$$= \int_0^1 \int_0^x y \cdot \frac{1}{x} \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \left[\frac{y^2}{2} \Big|_0^x \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \quad ✓$$

e) No lo son, ya que $\exists (x,y) \in$ ~~[illegible]~~ conjunto donde no vale la propiedad $f_{XY} = f_X \cdot f_Y$ si X, Y independientes. En particular, para $x = 1/2$, $y = 1/4$, este punto no se encuentra en los bordes del conjunto, y pertenece al conjunto ~~[illegible]~~ luego:

$$f_{X,Y}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = f_X\left(\tfrac{1}{2}\right) f_Y\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1/2} \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,x)}(y) = \frac{1}{2} I_{(0,1)}(x) \left(-\ln(y)\right) \cdot I_{(0,x)}(y)$$

$$\Leftrightarrow 2 = 0{,}69314$$

Lo cual es absurdo y por lo tanto X e Y no son independientes

1) a) V = Visa, M = Mastercard, E = efectivo

$V = 0{,}5 \quad V\cap M = 0{,}15 \quad M\cap E = 0{,}25$

$M = 0{,}35 \quad V\cap E = 0{,}35 \quad M\cap E\cap V = 0{,}1$

Los que tienen solo Visa ~~son (V∪M)∖E~~ o mastercard son ~~⇒ (V∪M)∖E~~

$\cancel{\Rightarrow (V+M-V\cap M)\setminus E = (V+M-V\cap M) - E\cap(V\cup M)}$

$\cancel{\Rightarrow V+M-V\cap M = 0{,}5+0{,}35-0{,}15 = 0{,}7}$

Los que tienen solo Visa, solo Mastercard o Visa y Mastercard pero no efectivo

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{Solo Visa: } V - V\cap M - V\cap E + V\cap M\cap E = 0{,}1 \\ \Rightarrow \text{Solo Mastercard: } M - V\cap M - E\cap M + V\cap M\cap E = 0{,}05 \\ \Rightarrow \text{Visa y Mastercard pero no efectivo: } V\cap M - V\cap M\cap E = 0{,}05 \end{array}\right\} \boxed{0{,}2}$$

Luego, la probabilidad que se pierda una venta es la prob. que tenga alguna con ~~...~~ Visa, mastercard o Visa y Mastercard pero en ningún caso que también tenga efectivo, osea lo calculado antes, $\boxed{P = 0{,}2}$

b) P("perder venta") = 0,25

"cant. de ventas perdidas en 10 pedidos"

10 pedidos independientes, éxito = "perder una venta", X = "perder N ventas en 10 días"

$X \sim Bi(10; 0{,}25)$

P("perder 2 o más ventas") = 1 − P("perder menos de 2 ventas")

$$\Rightarrow 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{10}{0}\cdot(0{,}25)^0\cdot(0{,}75)^{10} - \binom{10}{1}\cdot(0{,}25)^1\cdot(0{,}75)^9 \hat{=} 0{,}756$$

c) P("realizar más de 9 pedidos para perder 2 ventas")

$$\Rightarrow 1 - P(\underbrace{\text{"perder 2 o más ventas antes de 10 pedidos"}}_{\text{Esto es todas las formas de perder 2 ventas en 9 pedidos}})$$

[redacted] Mayo 4/4

$X \sim Bi(9, 0{,}25)$

Busco perder 2 ventas, entonces $P(X=2) = \binom{9}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^7 \simeq 0{,}3$

Entonces, la proba de vender más de 10 llamadas es

$1 - P(X=2) \simeq 0{,}7$ $\quad 1 - \sum_{k=2}^{9} P(X=k) = P(X=0) + P(X=1)$

≈ 0.3003

d) ¿~~Pedidos~~

"Pedidos hasta perder primera venta" $= X \sim Ge(0{,}25)$

Busco la $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}25} = \boxed{4}$ ✓